

# EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS (EDO)

## PROBLEMA DO VALOR INICIAL (PVI)

### Introdução

Seja a seguinte equação diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y); \quad y = y_0 \text{ para } x = x_0.$$

que é referenciado com o *problema do valor inicial*.

Essa denominação deve-se ao fato de que o objetivo é determinar uma função  $y = y(x)$  tal que  $dy/dx = f(x, y)$ , satisfazendo à condição (inicial)  $y(x_0) = y_0$ .

Considere, por exemplo, a equação diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = x y; \quad y_0 = 1 \text{ para } x_0 = 0.$$

Nesse caso, tem-se  $f(x, y) = x y$  e  $y(0) = 1$ .

A equação diferencial pode ser resolvida analiticamente, pelo método conhecido como “método da separação das variáveis”, conforme se mostra a seguir:

$$\frac{dy}{y} = x dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int x dx + C,$$

onde  $C$  é uma constante.

Dessa forma, pode-se escrever:

$$\ln(y) = \frac{x^2}{2} + C \quad \Rightarrow \quad y = e^C e^{x^2/2}.$$

Como  $y(0) = 1$ , obtém-se  $1 = e^c e^0$ , ou seja,  $e^c = 1$ .

Assim, a solução para o problema do valor inicial é:

$$y(x) = e^{x^2/2}.$$

Apesar de existir uma vasta teoria sobre métodos analíticos para a solução de equações diferenciais, existem situações em que é necessária a utilização de *métodos numéricos*.

Isto se deve principalmente ao fato de que muitas vezes inexistem uma solução analítica exata, ou ainda, que a resolução pelos métodos analíticos existentes poderia ser muito trabalhosa.

Apresentam-se a seguir os métodos numéricos mais comuns para a solução do problema do valor inicial.

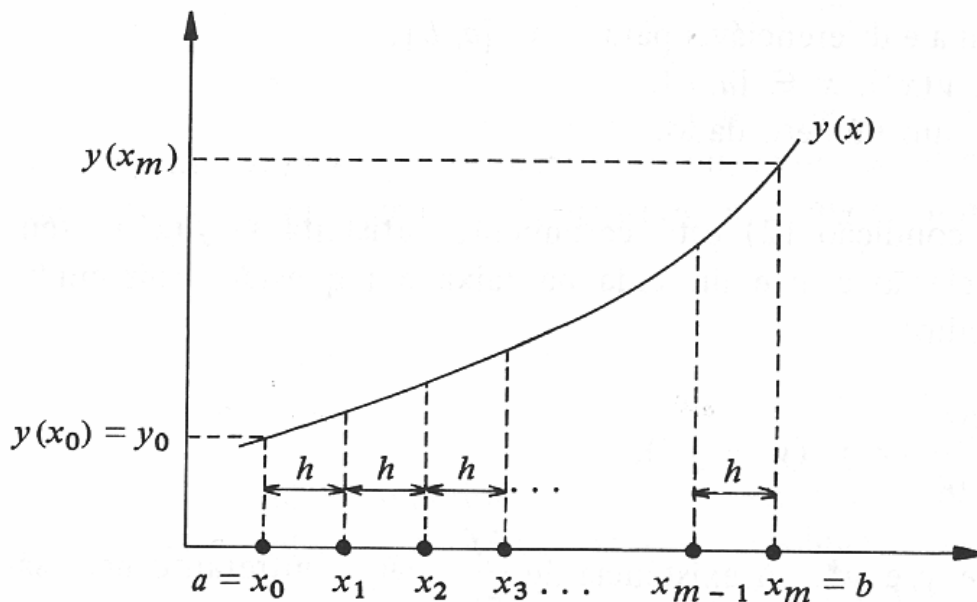


Figura 1: Gráfico da solução de  $dy/dx=f(x,y)$

## Solução numérica para o problema do valor inicial

Considere a equação dada, suponha que a solução  $y = y(x)$  seja a função representada na Figura 1.

Considere ainda a seqüência de pontos  $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_i, \dots\}$ , espaçados por um intervalo  $h$  (i.e.  $x_{i+1} = x_i + h$ ).

No algoritmo a ser desenvolvido para resolver esta EDO, supõe-se conhecida a solução até o  $i$ -ésimo valor, i.e.,  $\{y_0, \dots, y_i\}$  e utilizam-se estes valores para calcular  $y_{i+1}$ .

O processo se repete até que se tenha um número suficiente de pontos, representativos da função desejada.

A seguir analisam-se os principais métodos de solução.

### Método de Euler

Considere, mais uma vez, a curva da Figura 1, que representa a solução da equação dada.

Utilizando a tal equação pode-se escrever:

$$\frac{dy_i}{dx_i} = f(x_i, y_i)$$

Por outro lado, a derivada no ponto  $(y_i, x_i)$  é definida por:

$$\frac{dy_i}{dx_i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(x_i + h) - y(x_i)}{h}$$

Usando o fato de que  $y(x_i) = y_i$  e  $x_i + h = x_{i+1}$ , a seguinte aproximação é verdadeira:

$$\frac{dy_i}{dx_i} \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h}, \text{ para } h \text{ suficientemente pequeno.}$$

O fundamento do método de Euler consiste em considerar a aproximação acima para a derivada  $dy/dx$ .

Sendo assim, o valor de  $h$  (denominado “passo de integração”) deve ser escolhido suficientemente pequeno, para não comprometer a solução final da equação diferencial.

Substituindo então a aproximação obtida para a derivada no ponto  $(x_i, y_i)$  na equação acima, tem-se:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i),$$

ou seja,

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

A equação acima fornece uma forma para o cálculo da seqüência  $\{y_0, y_1, y_2, \dots\}$ , uma vez especificada a seqüência de  $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$  e o passo de integração  $h$ .

Note que, como a equação acima é uma fórmula recursiva, necessita-se conhecer a priori o ponto  $y_0$  a fim de que se possa prosseguir com o cálculo de  $\{y_1, y_2, \dots\}$ .

Sendo esse ponto fornecido pela condição inicial, tendo em vista que  $y(x_0) = y_0$ .

**Ex.:** Resolver pelo método de Euler o seguinte problema do valor inicial (PVI):

$$\frac{dy}{dx} = x y, \quad y(0) = 1.$$

Neste caso temos  $f(x, y) = x y$ , sendo assim, tem-se:

$$y_{i+1} = y_i + h x_i y_i = y_i (1 + h x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Considere  $x = [0 : 0.25 : 1]$ . Assim:

$i$	0	1	2	3	4
$x_i$	0,00	0,25	0,50	0,75	1,00
$y_i$	1	?	?	?	?

Para calcular os valores de  $\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$  recorre-se à fórmula recursiva vista anteriormente, que fornece os seguintes valores:

$$y_1 = y_0 (1 + h x_0) = 1,0000 \times (1 + 0,25 \times 0,00) = 1,0000$$

$$y_2 = y_1 (1 + h x_1) = 1,0000 \times (1 + 0,25 \times 0,25) = 1,0625$$

$$y_3 = y_2 (1 + h x_2) = 1,0625 \times (1 + 0,25 \times 0,75) = 1,1953$$

$$y_4 = y_3 (1 + h x_3) = 1,1953 \times (1 + 0,25 \times 0,75) = 1,4194$$

Neste exemplo, entretanto, sabe-se que a solução analítica é  $y = e^{x^2/2}$ .

Dessa forma pode-se calcular o erro existente entre a solução numérica (*aproximada*) e a solução analítica (*exata*).

Os valores da solução analítica, numérica e os respectivos erros são mostrados na Tabela a seguir:

<b>x</b>	<b>Sol. Analítica</b> ( $y = e^{x^2/2}$ )	<b>Sol. Numérica</b> <b>(Euler)</b>	<b>erro</b>
0,00	1,0000	1,0000	0,0000
0,25	1,0317	1,0000	0,0317
0,50	1,1331	1,0625	0,0706
0,75	1,3248	1,1953	0,1295
1,00	1,6487	1,4194	0,2293

### *Interpretação gráfica para o método de Euler*

O método de Euler é equivalente à regra dos retângulos para o cálculo de integrais.

Isto pode ser facilmente mostrado considerando-se a função  $f(x, y)$  dada, como uma função apenas de  $x$  (note que  $y = y(x)$ ).

Definindo-se então,  $F(x) = f(x, y(x))$ , a equação pode ser rescrita como

$$y(x) = \int_{x_i}^x F(x) dx + C, \quad x_i \leq x \leq x_{i+1}; \quad \begin{cases} \frac{dy(x)}{dx} = F(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}.$$

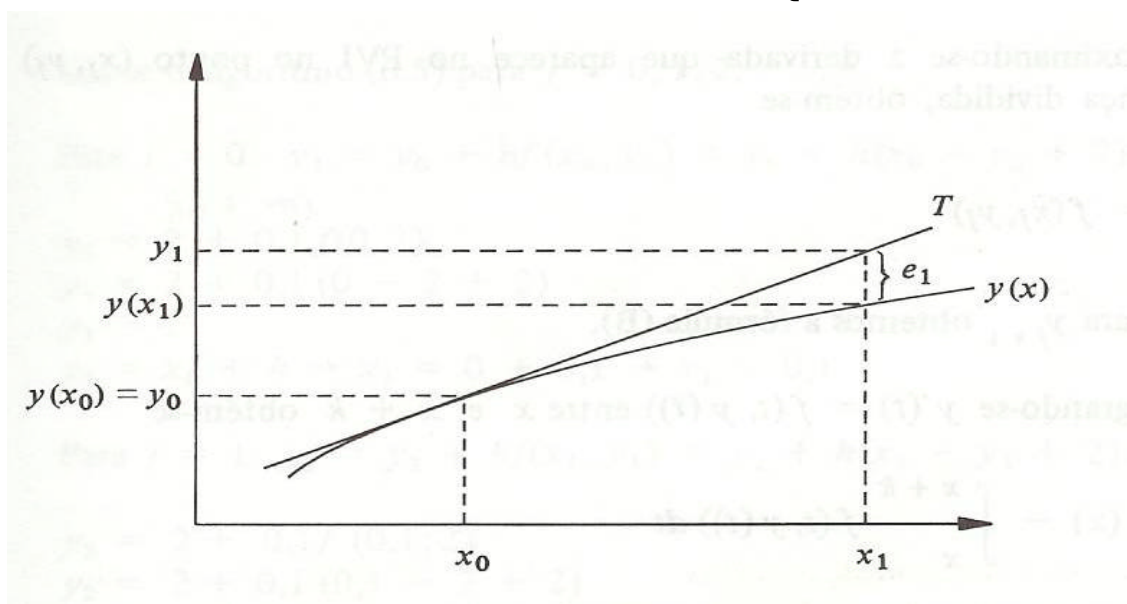


Figura 2: Aproximação pelo método de Euler.

Tomando  $x = x_i$  na equação anterior obtém-se  $C = y_i$ .  
Dessa forma:

$$y(x) = y_i + \int_{x_i}^x F(x)dx, \quad x_i \leq x \leq x_{i+1}.$$

e portanto, para  $x = x_{i+1}$ , tem-se:

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} F(x)dx$$

Comparando esta equação com a fórmula recursiva vista anteriormente, observa-se que a aplicação do método de Euler corresponde à adoção da seguinte aproximação:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} F(x)dx \approx hf(x_i, y_i) = hF(x_i)$$

com:  $h = x_{i+1} - x_i$

### *Análise do erro*

Para analisar o erro introduzido pelo método de Euler, considere a expansão em séries de Taylor para uma função  $y$  em torno de um ponto  $x_i$ :

$$y(x_i + h) = y(x_i) + h \left( \frac{dy}{dx} \right)_{x=x_i} + \frac{h^2}{2} \left( \frac{d^2y}{dx^2} \right)_{x=x_i} + \dots + \frac{h^n}{n!} \left( \frac{d^n y}{dx^n} \right)_{x=x_i} + R_{n+1}$$

onde  $R_{n+1}$  é dado por:

$$R_{n+1} = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \left( \frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}} \right) + \dots, \quad x_i < z < x_i + h$$

O erro que ocorre quando a série de Taylor é truncada, imediatamente após o termo que contém a  $n$ -ésima derivada. É denominado *erro de truncamento local*. Conforme pode ser observado, esse erro é da ordem (potência) de  $h^{n+1}$  (denota-se  $O(h^{n+1})$ ).

Assim, para  $n = 1$ , pode-se escrever:

$$y(x_i + h) = y(x_i) + h \left( \frac{dy}{dx} \right)_{x=x_i} + O(h^2)$$

Como, para um PVI,  $dy/dx = f(x, y)$ ,  $y(x_{i+1}) = y_{i+1}$  e  $y(x_i) = y_i$  obtém-se então:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) + O(h^2)$$

Comparando-se a equação acima com a equação do método de Euler, nota-se que o seu erro de truncamento local é  $O(h^2)$ .

O erro de truncamento discutido acima é introduzido ao realizar cada iteração do método; sendo assim, ele tem um efeito cumulativo, ou seja, a cada iteração é adicionado um erro da ordem de  $h^2$ .

Ao final da  $n$ -ésima iteração tem-se um erro total acumulado de  $nh^2$  (i.e.  $O(nh^2)$ ).

Como  $x_n - x_0 = nh$ , ou seja,  $n = (x_n - x_0)/h$ , resulta que  $n$  é proporcional a  $1/h$  e portanto, o erro total acumulado na  $n$ -ésima iteração é proporcional a  $(1/h)h^2 = h$  (i.e.  $O(h)$ ).

Esta medida nos dá uma indicação mais precisa do erro total introduzido pelo método e por isso é denominado *erro de truncamento global* (ou total).



Devido ao fato de que o método de Euler possui um erro de truncamento global  $O(h)$ , ele é classificado como um *método de primeira ordem*.

Verifica-se ainda que o erro de truncamento (local/global) é da ordem de potências naturais de  $h$  e, portanto, diminui com a diminuição de  $h$ .

Um outro tipo de erro é também introduzido, quando se usa um computador para resolver numericamente uma equação diferencial. Esse erro ocorre em decorrência da precisão finita com que os cálculos são efetuados e é denominado *erro de arredondamento*.

Para analisar como este erro influencia a resolução de equações diferenciais, considere a aproximação:

$$\frac{dy}{dx} \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$$

para a derivada  $dy/dx$ .

Supondo que o erro no cálculo da diferença  $y_{i+1} - y_i$  seja  $e$ , o erro de arredondamento total no cálculo de  $dy/dx$  será  $e/h$ .

Dessa forma, nota-se que o erro de arredondamento aumenta com a diminuição de  $h$ , efeito inverso ao que ocorre com o erro de truncamento.

Em geral os erros na resolução numérica de uma equação diferencial são dominados pelo erro de truncamento para grandes valores de  $h$  e pelo erro de arredondamento para pequenos valores de  $h$ .

## Métodos de ordem superior

O método de Euler é classificado como um método de primeira ordem, pelo fato de que o erro de truncamento global por ele introduzido é da ordem do passo de integração  $h$ .

Sendo assim, ao reduzir  $h$  pela metade, o erro também é reduzido pela metade; ao reduzir  $h$  pela quarta parte, o erro também é reduzido pela quarta parte; i.e. o método de Euler reduz o erro linearmente com o passo de integração.

Entretanto, do ponto de vista de aplicação prática, seria interessante que esse erro tivesse uma redução mais rápida com o passo de integração, e.g. quadrática, cúbica, etc.

Para tanto é necessário que o erro de truncamento global seja da ordem de  $h^2, h^3$ , respectivamente.

O fato do método de Euler ser de primeira ordem limita em muito sua aplicabilidade prática e os métodos de ordem superior são mais comuns na prática.

Como exemplos de métodos de ordem superior será abordada a classe de métodos de Runge-Kutta, bem como alguns métodos denominados preditores-corretores.

## Métodos de Runge-Kutta

### Runge-Kutta de 2ª ordem

Considere o problema do valor inicial apresentado anteriormente. Considere ainda valores intermediários das variáveis definidos por  $x_m = x_i + h/2$  e  $y_m = y(x_i + h/2)$ .

Pelo fato de que  $y(x_i + h) = y[(x_i + h/2) + h/2]$ , pode-se desenvolver  $y(x_i + h)$  em série de Taylor da seguinte forma:

$$y(x_i + h) = y(x_i + h/2) + \frac{h}{2} \left( \frac{dy}{dx} \right)_{x=x_m} + \frac{h^2}{8} \left( \frac{d^2y}{dx^2} \right)_{x=x_m} + \dots$$

ou ainda:

$$y_{i+1} = y_m + \frac{h}{2} \left( \frac{dy}{dx} \right)_{x=x_m} + \frac{h^2}{8} \left( \frac{d^2y}{dx^2} \right)_{x=x_m} + \dots$$

Por outro lado,  $y(x_i) = y(x_i + h/2 - h/2)$ , então:

$$\begin{aligned} y(x_i) &= y(x_i + h/2) - \frac{h}{2} \left( \frac{dy}{dx} \right)_{x=x_m} + \frac{h^2}{8} \left( \frac{d^2y}{dx^2} \right)_{x=x_m} - \dots \Rightarrow \\ \Rightarrow y_i &= y_m - \frac{h}{2} \left( \frac{dy}{dx} \right)_{x=x_m} + \frac{h^2}{8} \left( \frac{d^2y}{dx^2} \right)_{x=x_m} - \dots \end{aligned}$$

de onde obtém-se que:

$$y_{i+1} - y_i = h \left( \frac{dy}{dx} \right)_{x=x_m} + O(h^3),$$

ou ainda, de forma aproximada, com erro  $O(h^3)$ :

$$y_{i+1} - y_i \approx h \left( \frac{dy}{dx} \right)_{x=x_m}$$

Pretende-se eliminar o termo que depende de  $x_m$ .

Para isso, realiza-se o mesmo desenvolvimento anteriormente apresentado, agora para  $z = dy/dx$ , de onde obtém-se:

$$z_{i+1} + z_i = 2z_m + \frac{h^2}{4} \left( \frac{d^2 z}{dx^2} \right)_{x=x_m} + \dots \Rightarrow z_{i+1} + z_i \approx 2z_m.$$

Usando o fato de que  $z = dy/dx$ , tem-se:

$$\left( \frac{dy}{dx} \right)_{i+1} + \left( \frac{dy}{dx} \right)_i = 2 \left( \frac{dy}{dx} \right)_{x=x_m}$$

e como  $dy/dx = f(x, y)$  pode-se escrever:

$$f(x_{i+1}, y_{i+1}) + f(x_i, y_i) = 2 \left( \frac{dy}{dx} \right)_{x=x_m}$$

ou seja:

$$\left( \frac{dy}{dx} \right)_{x=x_m} = \frac{1}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})]$$

Finalmente, obtém-se:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})]$$

O processo iterativo apresentado na equação acima é um método implícito, tendo em vista que para calcular o valor de  $y_{i+1}$  necessita-se do valor de  $f(x_{i+1}, y_{i+1})$ .

O fato de ser um método implícito, restringe a aplicação do método a situações onde for possível se extrair  $y_{i+1}$  do argumento de  $f$ .

Uma forma de contornar esse problema consiste em utilizar o método de Euler para calcular o valor de  $y_{i+1}$  a ser utilizado no argumento de  $f$ .

Sendo assim, tem-se:

$$f(x_{i+1}, y_{i+1}) = f(x_{i+1}, y_i + hf(x_i, y_i))$$

||

$y_{i+1}$

Método de Euler

Podendo-se reescrever a equação iterativa da seguinte forma:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(k_1 + k_2); \begin{cases} k_1 = f(x_i, y_i) \\ k_2 = f(x_{i+1}, y_i + hk_1) \end{cases}$$

que é denominada [método de Runge-Kutta de 2ª ordem \(RK-2\)](#).

**Ex.:** Resolver, pelo método de Runge-Kutta de 2ª ordem, o seguinte problema do valor inicial

$$\frac{dx}{dy} = xy; \quad \begin{cases} y(0) = 1 \\ x = [0 : 0.25 : 1] \end{cases}$$

**Solução:** Tem-se:

$i$	0	1	2	3	4
$x_i$	0	0.25	0.50	0.75	1
$y_i$	1	?	?	?	?

Para calcular o valor de  $y_i, i \in \{1,2,3,4\}$ , utiliza-se a fórmula apresentada para o método RK-2, com  $f(x, y) = xy$ .

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}(k_1 + k_2), \quad \begin{cases} k_1 = f(x_0, y_0) = f(0,1) = 0 \\ k_2 = f(x_1, y_0 + hk_1) = f(0.25,1) = 0.25 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_1 = 1 + \frac{0.25}{2}(0 + 0.25) = 1.0313$$

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{2}(k_1 + k_2), \quad \begin{cases} k_1 = f(x_1, y_1) = f(0.25,1.0313) = 0.2578 \\ k_2 = f(x_2, y_1 + hk_1) = f(0.5,1.0958) = 0.5479 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_2 = 1.0313 + \frac{0.25}{2}(0.2578 + 0.5479) = 1.1320$$

$$y_3 = y_2 + \frac{h}{2}(k_1 + k_2), \quad \begin{cases} k_1 = f(x_2, y_2) = f(0.5,1.1320) = 0.5660 \\ k_2 = f(x_3, y_2 + hk_1) = f(0.75,1.2735) = 0.9551 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_3 = 1.1320 + \frac{0.25}{2}(0.5660 + 0.9551) = 1.3221$$

$$y_4 = y_3 + \frac{h}{2}(k_1 + k_2), \quad \begin{cases} k_1 = f(x_3, y_3) = f(0.75,1.3221) = 0.9916 \\ k_2 = f(x_4, y_3 + hk_1) = f(1,1.57) = 1.57 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_4 = 1.3221 + \frac{0.25}{2}(0.9916 + 1.57) = 1.6423$$

### Runge-Kutta de 4ª ordem

No método RK-2 considerou-se o desenvolvimento em séries de Taylor para  $y(x)$  até o termo de ordem dois.

Se forem considerados mais termos na série de Taylor, obtêm-se métodos de ordem mais elevada.

O método de Runge-Kutta de 4ª ordem (RK-4) é obtido considerando a série de Taylor para  $y$ , desenvolvida até o termo de ordem quatro, com o erro de truncamento local ( $O(h^5)$ ) sendo menor que o obtido para o RK-2.

Dessa forma, o erro total do RK-4 também é menor.

Apresenta-se a seguir a fórmula de recorrência para o método RK-4.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4); \begin{cases} k_1 = f(x_i, y_i) \\ k_2 = f(x_i + h/2, y_i + (h/2)k_1) \\ k_3 = f(x_i + h/2, y_i + (h/2)k_2) \\ k_4 = f(x_i + h, y_i + hk_3) \end{cases}$$

**Ex.:** Resolver, pelo método de Runge-Kutta de 4ª ordem, o seguinte problema do valor inicial:

$$\frac{dx}{dy} = xy; \quad \begin{cases} y(0) = 1 \\ x = [0 : 0.25 : 1] \end{cases}$$

**Solução:** Tem-se:

$i$	0	1	2	3	4
$x_i$	0	0.25	0.50	0.75	1
$y_i$	1	?	?	?	?

Para calcular o valor de  $y_i, i \in \{1, 2, 3, 4\}$ , utiliza-se a fórmula apresentada para o método RK-4, com  $f(x, y) = xy$ .

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

$$\begin{cases} k_1 = f(x_0, y_0) = f(0, 1) = 0 \\ k_2 = f(x_0 + h/2, y_0 + (h/2)k_1) = f(0.125, 1) = 0.125 \\ k_3 = f(x_0 + h/2, y_0 + (h/2)k_2) = f(0.125, 1.0156) = 0.1270 \\ k_4 = f(x_0 + h, y_0 + hk_3) = f(0.25, 1.0317) = 0.2579 \end{cases}$$

$$y_1 = 1 + \frac{0.25}{6}(0 + 2 \times 0.125 + 2 \times 0.1270 + 0.2579) = 1.0317$$

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

$$\begin{cases} k_1 = f(x_1, y_1) = f(0.25, 1.0317) = 0.2579 \\ k_2 = f(x_1 + h/2, y_1 + (h/2)k_1) = f(0.375, 1.0639) = 0.3990 \\ k_3 = f(x_1 + h/2, y_1 + (h/2)k_2) = f(0.3750, 1.0816) = 0.4056 \\ k_4 = f(x_1 + h, y_1 + hk_3) = f(0.5, 1.1331) = 0.5665 \end{cases}$$

$$y_2 = 1.0317 + \frac{0.25}{6}(0.2579 + 2 \times 0.3390 + 2 \times 0.4056 + 0.5665) = 1.1331$$



$$y_3 = y_2 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

$$\begin{cases} k_1 = f(x_2, y_2) = f(0.5, 1.1331) = 0.5666 \\ k_2 = f(x_2 + h/2, y_2 + (h/2)k_1) = f(0.6250, 1.2039) = 0.7525 \\ k_3 = f(x_2 + h/2, y_2 + (h/2)k_2) = f(0.6250, 1.2272) = 0.7670 \\ k_4 = f(x_2 + h, y_2 + hk_3) = f(0.75, 1.3248) = 0.9936 \end{cases}$$

$$y_3 = 1.1331 + \frac{0.25}{6}(0.5666 + 2 \times 0.7525 + 2 \times 0.7670 + 0.9936) = 1.3247$$

$$y_4 = y_3 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

$$\begin{cases} k_1 = f(x_3, y_3) = f(0.75, 1.3247) = 0.9935 \\ k_2 = f(x_3 + h/2, y_3 + (h/2)k_1) = f(0.8750, 1.4489) = 1.2678 \\ k_3 = f(x_3 + h/2, y_3 + (h/2)k_2) = f(0.8750, 1.4832) = 1.2978 \\ k_4 = f(x_3 + h, y_3 + hk_3) = f(1, 1.6491) = 1.6491 \end{cases}$$

$$y_4 = 1.3247 + \frac{0.25}{6}(0.9935 + 2 \times 1.2678 + 2 \times 1.2978 + 1.6491) = 1.6486$$

A Tabela a seguir compara os métodos de Euler, RK-2 e RK-4, a fim de dar uma idéia da eficiência de cada método.

x	Solução Analítica	Solução Numérica			erro		
		Euler	RK-2	RK-4	Euler	RK-2	RK-4
0.00	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.25	1.0317	1.0000	1.0313	1.0317	0.0317	0.0004	0.0000
0.50	1.1331	1.0625	1.1320	1.1331	0.0706	0.0011	0.0000
0.75	1.3248	1.1953	1.3221	1.3247	0.1295	0.0027	0.0001
1.00	1.6487	1.4194	1.6423	1.6486	0.2293	0.0064	0.0001

## Métodos de Adams

Os métodos de Adams utilizam informações calculadas em vários passos anteriores para obter a solução no passo seguinte.

Por exemplo, um método de ordem 3 utiliza informações em  $x_i$ ,  $x_{i-1}$  e  $x_{i-2}$  para gerar a solução referente a  $x_{i+1}$  (os métodos discutidos anteriormente utilizavam informações apenas em  $x_i$ ).

Os métodos de Adams formam duas classes principais: o *método preditor de Adams-Bashforth* e o *método corretor de Adams-Moulton*, que podem ser combinados em um único método, denominado: *método preditor-corrector de Adams-Bashforth-Moulton*.

### *Método Preditor de Adams-Bashforth*

Seja o problema do valor inicial:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y); \quad y = y_0 \text{ para } x = x_0.$$

Lembrando que  $y = y(x)$ , define-se  $F(x) = f(x, y)$ , e, dessa forma:

$$y_{i+1} - y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} F(x) dx$$

A equação acima poderia, em princípio, ser uma fórmula de recorrência para se calcular a seqüência  $\{y_1, y_2, \dots\}$ . Entretanto, isso não pode ser feito diretamente porque não se conhece, a priori,  $F(x)$ .

A idéia do método *preditor de Adams* é considerar  $F(x)$  como sendo um polinômio interpolador no intervalo  $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ , já que os valores de  $y$  nestes pontos são conhecidos.

Essa aproximação é razoável para intervalos de discretização pequenos.

Como primeira etapa do desenvolvimento do método, realiza-se uma interpolação linear entre os pontos  $x_{i-1}$  e  $x_i$ , como segue:

$$F(x) = ax + b, \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i.$$

Tomando  $x = x_{i-1}$  e  $x = x_i$ , obtém-se:

$$\begin{cases} F(x_{i-1}) = ax_{i-1} + b \\ F(x_i) = ax_i + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{h} \\ b = \frac{F(x_{i-1})x_i - F(x_i)x_{i-1}}{h} \end{cases}$$

onde  $h = x_i - x_{i-1}$ . Assim:

$$F(x) = \frac{x_i - x}{h} F(x_{i-1}) + \frac{x - x_{i-1}}{h} F(x_i), \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i.$$

Utilizando essa aproximação para  $F(x)$  a equação inicialmente apresentada pode ser reescrita como:

$$y_{i+1} - y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{x_i - x}{h} F(x_{i-1}) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{x - x_{i-1}}{h} F(x_i) dx.$$

Para resolver tal integral, pode-se fazer a seguinte mudança de variável:

$$x = x_i + \mathbf{g}h, \quad 0 \leq \mathbf{g} \leq 1; \quad \begin{cases} \mathbf{g} = 0 & \text{para } x = x_i \\ \mathbf{g} = 1 & \text{para } x = x_{i+1} \end{cases}$$

de onde:

$$\begin{aligned} x_i - x &= -\mathbf{g}h \\ x - x_{i-1} &= x_i + \mathbf{g}h - x_{i-1} = h + \mathbf{g}h = (1 + \mathbf{g})h \\ dx &= h d\mathbf{g} \end{aligned}$$

e portanto:

$$\begin{aligned} y_{i+1} - y_i &= \int_0^1 -hF(x_{i-1})\mathbf{g} d\mathbf{g} + \int_0^1 hF(x_i)(1 + \mathbf{g}) d\mathbf{g} \\ &= -hF(x_{i-1})\frac{\mathbf{g}^2}{2}\Big|_0^1 + hF(x_i)\left(\mathbf{g} + \frac{\mathbf{g}^2}{2}\right)\Big|_0^1 \\ &= -\frac{h}{2}F(x_{i-1}) + 3\frac{h}{2}F(x_i) \\ &= \frac{h}{2}[3F(x_i) - F(x_{i-1})]. \end{aligned}$$

Usando o fato de que  $F(x_i) = f(x_i, y_i)$ , obtém-se a seguinte equação recursiva, para o método preditor de Adams-Bashforth:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[3f(x_i, y_i) - f(x_{i-1}, y_{i-1})]$$

Nesse caso, partindo de  $(x_{i-1}, y_{i-1})$  conhecido, precisa-se prever  $(x_i, y_i)$ , para se obter  $y_{i+1}$ .

## Método Corretor de Adams-Moulton

O desenvolvimento do método de Adams-Moulton é similar ao do método de Adams-Bashforth descrito anteriormente.

A diferença reside no fato de que, na resolução da integral, considerar-se-á  $F(x)$  como um polinômio interpolador entre  $x_i$  e  $x_{i+1}$ , ao invés de  $x_{i-1}$  e  $x_i$ , como foi feito anteriormente.

Assim sendo, e considerando mais uma vez  $F(x)$  como sendo uma reta para  $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ , tem-se:

$$F(x) = ax + b, \quad x_i \leq x \leq x_{i+1}.$$

Utilizando essa aproximação para  $F(x)$ , tem-se:

$$y_{i+1} - y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{x_{i+1} - x}{h} F(x_i) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{x - x_i}{h} F(x_{i+1}) dx.$$

Após resolver as integrais, obtém-se a seguinte fórmula de recorrência, para o método de Adams-Moulton:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})]$$

Note que no lado direito da equação acima aparece o termo  $f(x_{i+1}, y_{i+1})$  o que torna este método *implícito*, ou seja, para implementar este método necessita-se extrair  $y_{i+1}$  que aparece no argumento de  $f(x_{i+1}, y_{i+1})$  e agrupá-lo com o do lado esquerdo da equação.

Este procedimento, entretanto, nem sempre é simples ou mesmo possível de realizar. Uma alternativa, nesse caso, é utilizar uma combinação deste método com o método preditor apresentado anteriormente, formando assim o método preditor corretor de Adams-Bashforth-Moulton.

### *Método preditor-corretor de Adams-Bashforth-Moulton*

A idéia é utilizar o método de Adams-Bashforth para obter uma predição para  $y_{i+1}$  (denotado  $y_{i+1}^p$ ) que é utilizado para substituir o valor de  $y_{i+1}$  no argumento de  $f(x_{i+1}, y_{i+1})$  na equação do método de Adams-Moulton.

Nesse caso, obtém-se o seguinte conjunto de equações para o método preditor-corretor:

$$\begin{cases} y_{i+1}^p = y_i + \frac{h}{2} [3f(x_i, y_i) - f(x_{i-1}, y_{i-1})] \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^p)] \end{cases}$$

A vantagem desta formulação é que ela simplifica o método de Adams-Moulton e é esperado um erro menor que o introduzido pela parte correspondente ao do método de Adams-Bashforth.

A expectativa por um erro menor decorre do fato de que o erro de truncamento local introduzido pelo método de Adams-Moulton é menor que o introduzido pelo método de Adams-Bashforth.

Nota-se que o método preditor-corretor só pode ser utilizado após calcularmos o valor de  $y_i$ , pois  $y_{i+1}^p$  depende de  $f(x_{i-1}, y_{i-1})$ . Sendo assim, para inicialização, utiliza-se um outro método, que pode ser o de Euler ou o de Runge-Kutta.

**Ex.:** Resolver, pelo método preditor-corretor de 2ª ordem, o seguinte problema do valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = x y, \quad y(0) = 1,$$

para  $x = [0 : 0.25 : 1]$ . Utilizar o método de Runge-Kutta de 2ª ordem para inicialização.

**Solução:** Neste caso, igualmente ao apresentado nos exemplos anteriores, tem-se:

$i$	$0$	$1$	$2$	$3$	$4$
$x_i$	$0$	$0.25$	$0.50$	$0.75$	$1$
$y_i$	$1$	$?$	$?$	$?$	$?$

Para calcular o valor de  $y_1$  utiliza-se RK-2 (com  $f(x, y) = x y$ ):

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}(k_1 + k_2), \quad \begin{cases} k_1 = f(x_0, y_0) = f(0, 1) = 0 \\ k_2 = f(x_1, y_0 + hk_1) = f(0.25, 1) = 0.25 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_1 = 1 + \frac{0.25}{2}(0 + 0.25) = 1.0313$$

O valor de  $y_i$ ,  $i \in \{2, 3, 4\}$ , será calculado pela fórmula do método preditor-corretor, ou seja:

$$\begin{aligned} y_2^p &= y_1 + \frac{h}{2}[3f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0)] = \\ &= 1.0313 + \frac{0.25}{2}[3 \times 0.25 \times 1.0313 - 0] = 1.1280 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + \frac{h}{2}[f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2^p)] = \\ &= 1.0313 + \frac{0.25}{2}[0.25 \times 1.0313 + 0.5 \times 1.1280] = 1.1340 \end{aligned}$$

$$y_3^p = y_2 + \frac{h}{2}[3f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)] =$$

$$= 1.1340 + \frac{0.25}{2}[3 \times 0.5 \times 1.1340 - 0.25 \times 1.0313] = 1.3144$$

$$y_3 = y_2 + \frac{h}{2}[f(x_2, y_2) + f(x_3, y_3^p)] =$$

$$= 1.1340 + \frac{0.25}{2}[0.5 \times 1.1340 + 0.75 \times 1.3144] = 1.3281$$

$$y_4^p = y_3 + \frac{h}{2}[3f(x_3, y_3) - f(x_2, y_2)] =$$

$$= 1.3281 + \frac{0.25}{2}[3 \times 0.75 \times 1.3281 - 0.5 \times 1.1340] = 1.6308$$

$$y_4 = y_3 + \frac{h}{2}[f(x_3, y_3) + f(x_4, y_4^p)] =$$

$$= 1.3281 + \frac{0.25}{2}[0.75 \times 1.3281 + 1 \times 1.6308] = 1.6565$$

x	Solução Analítica	Solução Numérica			erro		
		PC-2	RK-2	RK-4	PC-2	RK-2	RK-4
0.00	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.25	1.0317	1.0313	1.0313	1.0317	0.0004	0.0004	0.0000
0.50	1.1331	1.1340	1.1320	1.1331	0.0009	0.0011	0.0000
0.75	1.3248	1.3281	1.3221	1.3247	0.0033	0.0027	0.0001
1.00	1.6487	1.6565	1.6423	1.6486	0.0078	0.0064	0.0001



## Sistemas de equações diferenciais

Os métodos de solução numérica de equações diferenciais apresentados anteriormente podem ser aplicados apenas para equações de primeira ordem.

Entretanto, conforme se sabe, diversos problemas importantes envolvendo o problema do valor inicial são modelados como uma equação de *segunda* ordem (ou superior).

Dessa forma, é natural se buscar uma maneira de adaptar os algoritmos discutidos acima, para estas situações.

Suponha que se deseja resolver o seguinte problema do valor inicial de segunda ordem:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, dy/dx), \quad y(x_0) = y_0, \quad dy(x_0)/dx = \dot{y}_0$$

A idéia, neste caso, é transformar essa equação em um *sistema de equações diferenciais de primeira ordem*. Para tanto, definem-se as variáveis auxiliares:

$$X_1 = y, \quad X_2 = \dot{y} = dy/dx,$$

daí;

$$dX_1/dx = \dot{X}_1 = dy/dx = X_2 \text{ e } dX_2/dx = \dot{X}_2 = d^2y/dx^2$$

logo, pode-se reescrever a equação da seguinte forma:

$$\dot{X}_1 = X_2 \text{ e } \dot{X}_2 = f(x, v, z)$$

com condição inicial  $X_1(0) = y_0$  e  $X_2(0) = \dot{y}_0$ .

Observa-se que a equação diferencial de segunda ordem foi transformada em um sistema de equações (2 equações) de primeira ordem, onde, ao invés de apenas uma variável dependente ( $y$ ), tem-se duas ( $X_1$  e  $X_2$ ).

Sendo assim, os métodos de solução discutidos anteriormente devem ser adaptados para poder tratar o caso de mais de uma variável dependente.

Considere o seguinte sistema de equações diferenciais de ordem dois:

$$\begin{cases} X_1 = f_1(x, X_1, X_2) \\ X_2 = f_2(x, X_1, X_2) \end{cases}, \quad X_1(0) = X_{10}, \quad X_2(0) = X_{20}$$

Para resolver esse sistema de equações, pode-se aplicar qualquer dos métodos discutidos anteriormente, para cada uma das equações, ou seja:

- ◆ **Método de Euler:** A aplicação da fórmula de recorrência do método de Euler às equações acima, resulta em:

$$\begin{cases} X_{1k+1} = X_{1k} + hf_1(x_k, X_{1k}, X_{2k}) \\ X_{2k+1} = X_{2k} + hf_2(x_k, X_{1k}, X_{2k}) \end{cases}$$

- ◆ **Método RK-2:** Utilizando a fórmula de RK-2 obtém-se:

$$\begin{cases} X_{1k+1} = X_{1k} + \frac{h}{2}(k_{11} + k_{12}) \\ X_{2k+1} = X_{2k} + \frac{h}{2}(k_{21} + k_{22}) \end{cases}$$

onde:

$$\begin{cases} \begin{cases} k_{11} = f_1(x_k, X_{1k}, X_{2k}) \\ k_{12} = f_1(x_{k+1}, X_{1k} + hk_{11}, X_{2k} + hk_{21}) \end{cases} \\ \begin{cases} k_{21} = f_2(x_k, X_{1k}, X_{2k}) \\ k_{22} = f_2(x_{k+1}, X_{1k} + hk_{11}, X_{2k} + hk_{21}) \end{cases} \end{cases}$$

A aplicação dos outros métodos (RK-4, preditor-corretor de ordem 2 e 4) se faz de forma similar.

**Ex.:** Considere a seguinte equação linear de segunda ordem:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4y = \cos(t), \quad y(0) = dy(0)/dt = 0$$

que pode modelar um sistema massa-mola sem amortecimento, sujeito a uma força externa do tipo (cos)senoidal, e que se encontra inicialmente em repouso.

A solução exata para esta equação é  $y = \frac{1}{3}(\cos(t) - \cos(2t))$  (note que a variável independente  $x$  foi substituída por  $t$ ).

Para resolver o problema numericamente, defin-se  $X_1 = y$  e  $X_2 = dy/dt = \dot{y}$ , obtendo-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = X_2 \\ \dot{X}_2 = -4X_1 + \cos(t) \end{cases}, \quad X_1(0) = X_2(0) = 0$$

Aplicando o método de Euler, obtém-se:

$$\begin{cases} X_{1k+1} = X_{1k} + h X_{2k} \\ X_{2k+1} = X_{2k} + h(-4X_{1k} + \cos(t_k)) \end{cases}; \quad X_{10} = X_{20} = 0$$

Considerando  $t = [0 : 0.1 : 1]$ , as equações recursivas acima fornecerão os seguintes valores:

$t_k$	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
$X_{1k}$	0,00	0,00	0,01	0,03	0,06	0,10	0,14	0,19	0,24	0,30	0,34
$X_{2k}$	0,00	0,10	0,20	0,29	0,38	0,45	0,49	0,52	0,52	0,49	0,44