INTERPOLAÇÃO

Introdução

- A interpolação consiste em determinar, a partir de um conjunto de dados discretos, uma função ou um conjunto de funções analíticas que possam servir para a determinação de qualquer valor no domínio de definição.
- Pode-se ver a interpolação como um processo numérico que mapeia uma função discreta para uma função contínua.
- A interpolação tem vasta aplicação em diversos campos da ciência, como por exemplo, na computação gráfica, no processamento de sinais e imagens.
- É ferramenta numérica básica na integração numérica e nos rigorosos métodos numéricos de solução de equações diferenciais (Método de Galerkin, Método dos Elementos Finitos, Elementos de Contorno, etc.).

Problema Geral de Interpolação

Dados:

1. Um conjunto de pontos $\{x_i\}$, $i = 1,2, \ldots, N$
2. Um conjunto de valores $\{y_i\}$, $i = 1,2, \ldots, N$
3. Um conjunto de funções (*denominadas de funções de base*),

$$\{f_j(x)\}, j = 1,2, \ldots, N$$

Encontrar:

Os coeficientes a_j, $j = 1,2, \ldots, N$, tal que

$$y_i = \sum_{j=1}^{N} a_j f_j(x_i), \; i = 1,2, \ldots, N$$

A equação acima pode ser escrita sob forma matricial

$$\boldsymbol{y} = \mathbf{B}\boldsymbol{a} \text{ ou } \boldsymbol{a} = \mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{y},$$

onde $\boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{a}$ são vetores colunas representando respectivamente os dados conhecidos e os coeficientes a serem determinados, e **B** é a matriz definida por:

$$\mathbf{B} = \{b_{i,j}\} = f_j(x_i)$$

É importante observar que para o problema de interpolação ter uma solução é necessário que a matriz **B** admita uma inversa, o que pode não ocorrer dependendo da escolha das funções de base.

Ex.: Dado $\boldsymbol{x} = (1,\ -1)$ e $\boldsymbol{y} = [1\ 0]^T$ e escolhendo as funções de base como $f_j(x) = x^{j(j-1)}$,temos:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, b_{i,j} = f_j(x_i)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

o $det(B) = 0$, portanto o sistema não admite solução.

Interpolação linear

A partir de dois pontos distintos de $y = f(x)$, p. ex. (x_0, y_0) e (x_1, y_1), deseja-se encontrar o valor da função y_i para um ponto de abcissa intermediária x_i.

A maneira mais simples de estimar y_i é através de uma interpolação linear, i.e., supondo que o ponto (x_i, y_i) pertence ao segmento de reta que une os pontos de coordenadas conhecidas.

Esse segmento é parte do "polinômio interpolador" de 1º grau, definido por:

$$P_1(x) = a_1 x + a_0$$

A fim de determinar os coeficientes a_1 e a_0, deve-se resolver o sistema:

$$\begin{cases} a_1 x_0 + a_0 = y_0 \\ a_1 x_1 + a_0 = y_1 \end{cases}$$

ou, em forma matricial:

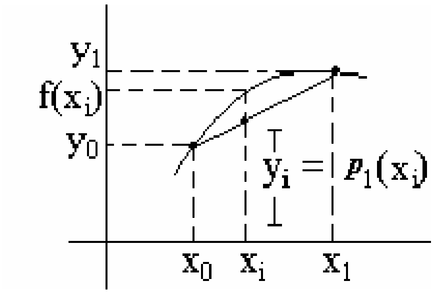
$$\begin{bmatrix} x_0 & 1 \\ x_1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

Pode-se demonstrar que para que o problema de interpolação seja determinado, o grau do polinômio interpolador é sempre igual ao número de pontos menos um.

Erro de Truncamento

É o erro cometido em decorrência da representação de uma suposta função $f(x)$ por uma reta, o que equivale a desprezar os termos de ordem igual ou superior a 2 do seu desenvolvimento em série de Taylor.

Seja p. ex. a função do gráfico:



Seu erro de truncamento é dado por:

$$E_T(x_i) = f(x_i) - p_1(x_i)$$

É fácil observar que esse erro se anula para $x = x_0$ e para $x = x_1$. Assim, pode-se escrever a expressão do erro na forma:

$$E_T(x_i) = A(x - x_0)(x - x_1)$$

A fim de determinar uma expressão para A, considere-se a função auxiliar $G(t)$ definida por:

$$G(t) = f(t) - \phi_1(t) - E_T(t) = f(t) - (a_1 t + a_0) - (t - x_0)(t - x_1) \cdot A$$

É fácil observar que $G(t)$ se anula, pelo menos em três pontos: x_0, x_1 e x_i. Portanto:

$$\left.\begin{array}{l} \exists\, \varepsilon_1 \in (x_0, x_i) \,/\, G'(\varepsilon_1) = 0 \\ \exists\, \varepsilon_2 \in (x_i, x_1) \,/\, G'(\varepsilon_2) = 0 \end{array}\right\rangle \Rightarrow \exists\, \varepsilon \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \,/\, G''(\varepsilon) = 0$$

Mas, $G''(\varepsilon) = f''(\varepsilon) - 2A = 0$, logo: $A = \dfrac{f''(\varepsilon)}{2}$

Assim, a expressão do erro de truncamento, fica:

$$E_T(x) = \frac{f''(\varepsilon)}{2}(x - x_0)(x - x_1)$$

Exemplo:

Determinar o erro de truncamento cometido ao se efetuar uma interpolação linear da função $f(x) = x^2 - 3x + 2$, entre os pontos $x_0 = 1.0$ e $x_1 = 1.5$, para estimar o valor de $f(1.25)$

Solução:

$$f(1) = 0 \quad ; \quad f(1.5) = -0.25$$

$$f''(x) = 2, \quad \forall x$$

$$E_T(1.25) = (1.25 - 1.0) \cdot (1.25 - 1.5) \cdot \frac{2}{2} = -0.0625$$

O valor real de $f(1.25)$ é -0.1875 e o valor estimado pela interpolação linear pode ser calculado, após a determinação dos coeficientes, de acordo com:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1.5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.25 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.25 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 0.5 \\ a_1 = -0.5 \end{cases}$$

$$p_1(1.25) = -0.5 \cdot 1.25 + 0.5 = -0.125$$

O erro percentual é: 33.33% (alto!)

Interpolação quadrática

Dados três pontos (x_0, y_0), (x_1, y_1), e (x_2, y_2), pode-se definir um polinômio interpolador de acordo com:

$$p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

com erro E_T nulo para os 3 pontos dados. Os coeficientes de $p_2(x)$ podem ser determinados através de:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 = y_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 = y_2 \end{cases}$$

ou ainda:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

O sistema terá solução se o determinante (*de Vandermonde*) da matriz dos coeficientes (V) for diferente de zero:

$$\begin{aligned} det(V) &= x_2^2 x_1 + x_0 x_1^2 + x_2 x_0^2 - x_1 x_0^2 - x_2 x_1^2 - x_0 x_2^2 \\ &= x_2^2(x_1 - x_0) + x_1^2(x_0 - x_2) + x_0^2(x_2 - x_1) \\ &= x_0(x_1^2 - x_2^2) + x_1(x_2^2 - x_0^2) + x_2(x_0^2 - x_1^2) \\ &= x_0(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + x_1(x_2 - x_0)(x_2 + x_0) \\ &\quad + x_2(x_0 - x_1)(x_0 + x_1) \end{aligned}$$

Demonstra-se que $det(V) = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$. O leitor pode tentar chegar a esse resultado, após triangularizar a matriz V.

Erro de Truncamento

$$E_T = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \cdot \frac{f'''(\varepsilon)}{3!}$$

Interpolação Polinomial

- As funções de base são polinômios.
- Os mais utilizados são os:
  - Polinômios de Newton;
  - Polinômios de Lagrange; e,
  - Splines (*uma classe de polinômios parcialmente definidos*).

Interpolação por Polinômios de Newton

Definição do polinômio de Newton:

$$p_n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

ou

$$p_n = \sum_{i=0}^{n} a_i \prod_{j=0}^{i-1}(x - x_j)$$

onde: a_i são os coeficientes do polinômio a serem determinados na interpolação e x_j são os centros.

Determinação dos coeficientes

Considere um conjunto de pontos $\{x_i, y_i\}$, com $y_i = f(x_i)$. Seja $p_n(x)$ o polinômio de Newton a ser usado na interpolação. Como $p_n(x)$ deve reproduzir os valores de f nos pontos dados, tem-se:

$$p_n(x_i) = f(x_i),\ \ i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\begin{aligned} f(x) = p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_1)(x - x_0) + \cdots \\ + a_3(x - x_2)(x - x_1)(x - x_0) + \cdots \\ + a_n(x - x_{n-1}) \cdots (x - x_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x_0) &= a_0 \\ f(x_1) &= a_0 + a_1(x_1 - x_0) \\ f(x_2) &= a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_1)(x_2 - x_0) \end{aligned}$$

$$\boxed{a_0 = f(x_0)}$$

$$\boxed{a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f[x_1, x_0]}$$

$$a_2(x_2 - x_1)(x_2 - x_0) = f(x_2) - f(x_0) - f[x_1, x_0](x_2 - x_0)$$

$$a_2(x_2 - x_1)(x_2 - x_0) = f(x_2) - f(x_1) - f[x_1, x_0](x_2 - x_0) + f(x_1) - f(x_0)$$

$$\begin{aligned} a_2(x_2 - x_1)(x_2 - x_0) &= f(x_2) - f(x_1) - f[x_1, x_0](x_2 - x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x_1 - x_0) \\ &= f(x_2) - f(x_1) - f[x_1, x_0](x_2 - \cancel{x_0} - x_1 + \cancel{x_0}) \end{aligned}$$

$$a_2(x_2 - x_1)(x_2 - x_0) = f(x_2) - f(x_1) - f[x_1, x_0](x_2 - x_1)$$

$$f[x_2, x_1] = \{f(x_2) - f(x_1)\}/(x_2 - x_1)$$

$$a_2(x_2 - x_0) = f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]$$

$$\boxed{a_2 = \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0} = f[x_2, x_1, x_0]}$$

$$f(x_3)=a_0+a_1(x_3-x_0)+a_2(x_3-x_1)(x_3-x_0)+$$
$$+a_3(x_3-x_2)(x_3-x_1)(x_3-x_0)$$

$$a_3(x_3-x_2)(x_3-x_1)(x_3-x_0)=f(x_3)-f(x_2)-$$
$$-f[x_2,x_1,x_0](x_3-x_1)(x_3-x_0)-$$
$$-f[x_1,x_0](x_3-x_0)+f(x_2)-f(x_1)+$$
$$+f(x_1)-f(x_0)$$

$$a_3(x_3-x_2)(x_3-x_1)(x_3-x_0)=f(x_3)-f(x_2)-$$
$$-f[x_2,x_1,x_0](x_3-x_1)(x_3-x_0)-$$
$$-f[x_1,x_0]((x_3-x_0)+$$
$$+\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x_2-x_0)+$$
$$+\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x_1-x_0)$$

$$a_3(x_3-x_2)(x_3-x_1)(x_3-x_0)=\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}(x_3-x_2)-$$
$$-f[x_2,x_1,x_0](x_3-x_1)(x_3-x_0)-$$
$$-f[x_1,x_0](x_3-x_0)+f[x_2,x_1](x_2-x_1)-$$
$$-f[x_2,x_1](x_3-x_2)+$$
$$+f[x_2,x_1](x_3-x_2)+f[x_1,x_0](x_1-x_0)$$

$$=(x_3-x_2)\{f[x_3,x_2]-f[x_2,x_1]\}-$$
$$-f[x_2,x_1,x_0](x_3-x_1)(x_3-x_0)+$$
$$+f[x_2,x_1](x_3-x_1)-f[x_1,x_0](x_3-x_1)$$

$$=(x_3-x_2)\{f[x_3,x_2]-f[x_2,x_1]\}\cdot\frac{x_3-x_1}{x_3-x_1}-$$
$$-f[x_2,x_1,x_0](x_3-x_1)(x_3-x_0)+$$
$$+(x_3-x_1)\{f[x_2,x_1]-f[x_1,x_0]\}\cdot\frac{x_2-x_0}{x_2-x_0}$$

onde $f[x_k, x_{k-1}, , \ldots, x_1]$ é chamada de diferença dividida entre $y_1, \ldots, y_k$.

Assim, substituindo os valores dos coeficientes na expressão do polinômio, tem-se:

$$p_n = f(x_0) + f[x_1, x_0](x - x_0) + f[x_2, x_1, x_0](x - x_0)(x - x_1) + \cdots + f[x_n, x_{n-1}, \cdots, x_0](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

ou

$$p_n = \sum_{i=0}^{n} f[x_i, x_{i-1}, \cdots, x_0] \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

Tabela de Diferenças Divididas

i	x_i	$f(x_i)$	1^a	2^a	3^a
0	x_0	$f(x_0)$			
			$f[x_1,x_0]$		
1	x_1	$f(x_1)$		$f[x_2,x_1,x_0]$	
			$f[x_2,x_1]$		$f[x_3,x_2,x_1,x_0]$
2	x_2	$f(x_2)$		$f[x_3,x_2,x_1]$	
			$f[x_3,x_2]$		
3	x_3	$f(x_3)$			

$$\Delta^n y_i = \frac{\Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i}{x_{i+n} - x_i}$$

Ex. 1:

i	x_i	y_i	$\Delta^1 y_i$	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0	0.0	1.008	0.28	1.1	1.0	0.0
1	0.2	1.064	0.61	1.6	1.0	
2	0.3	1.125	1.09	2.0		
3	0.5	1.343	1.69			
4	0.6	1.512				

$$p_4(x) = 1.008 + 0.28(x - 0.0) + 1.1(x - 0.0)(x - 0.2) + 1.0(x - 0.0)(x - 0.2)(x - 0.3)$$

Ex. 2: Estimar o $ln(2)$, utilizando o polinômio de Newton de terceira ordem

i	x_i	$f(x_i)$	1^a	2^a	3^a
0	1	0			
			0.46209813		
1	4	1.3862944		-0.051873116	
			0.20273255		0.000786554415
2	6	1.7917595		-0.020410950	
			0.18232160		
3	5	1.6094379			

assim

$$\begin{aligned} p_3(x) = {} & 0 + 0.46209813(x - 1) - 0.051873116(x - 1)(x - 4) + \\ & + 0.0078655415(x - 1)(x - 4)(x - 6), \end{aligned}$$

$$p_3(2) = 0.62876869,\ ln = 0.69314718\ ;\ \varepsilon_t = 9.3\%$$

Estimativa de Erro na Interpolação por Polinômio de Newton

Semelhantemente ao truncamento feito na série de Taylor, tem-se:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

ou:

$$R_n = f[x, x_n, x_{n-1}, \cdots, x_0](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$
$$R_n \approx f[x_{n+1}, x_n, x_{n-1}, \cdots, x_0](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

Interpolação por Polinômio de Lagrange

O polinômio de Lagrange é simplesmente uma reformulação do polinômio de Newton, que evita o cálculo de diferenças divididas.

A forma geral do polinômio de Lagrange é:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i)$$

onde:

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

com:

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

O erro estimado de interpolação é o mesmo do polinômio de Newton.

Dedução dos coeficientes do polinômio de Lagrange (a partir do polinômio de Newton)

$$p_1(x) = f(x_0) + (x - x_0) f[x_1, x_0]$$

$$p_1(x) = f(x_0) + (x - x_0)\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$p_1 = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$$

que é o polinômio sob forma de Lagrange.

De forma semelhante para $p_2(x), p_3(x), \ldots, p_n(x)$:

$$p_2(x) = f(x_0) + (x - x_0) + f[x_1, x_0] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_2, x_1, x_0]$$

$$= f(x_0) + (x - x_0)\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} +$$

$$+ (x - x_0)(x - x_1) \cdot \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

$$= f(x_0)\left\{1 - \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_1 - x_0)}\right\} +$$

$$+ f(x_1)\left\{\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} - \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_1 - x_0)}\right\}$$

$$+ f(x_2) \cdot \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$=f(x_0)\frac{(x_2-x_0)(x_1-x_0)-(x-x_0)(x_2-x_0)+(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_1-x_0)}+$$

$$+f(x_1)\frac{(x-x_0)(x_2-x_0)(x_2-x_1)-(x-x_0)(x-x_1)(x_1-x_0)-(x-x_0)(x-x_1)(x_2-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_1-x_0)}+$$

$$+f(x_2)\cdot\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$=f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+$$

$$+f(x_1)\frac{(x-x_0)\{(x_2-x_0)(x_2-x_1)-(x-x_1)(x_1-x_0)-(x-x_1)(x_2-x_1)\}}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_1-x_0)}+$$

$$+\underbrace{f(x_2)\cdot\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}}_{T_2}$$

$$=\overbrace{f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}}^{T_0}+$$

$$+f(x_1)\frac{(x-x_0)\{(x_2-x_0)(x_2-x_1)-(x-x_1)[\cancel{x_1}-x_0+x_2-\cancel{x_1}]\}}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_1-x_0)}+$$

$$+T_2$$

$$=T_0+T_2+f(x_1)\frac{(x-x_0)\{(x_2-x_0)(x_2-\cancel{x_1}-x+\cancel{x_1})\}}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_1-x_0)}$$

$$p_2(x)=T_0+f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

Comparação entre as interpolações de Lagrange e de Newton

A fim de estabelecer uma comparação, determina-se o número n (número de pontos) total de multiplicações/divisões para cada método:

	Mult.	*Div.*	*Total*
Newton	$2n - 3$	$\frac{n^2 - n}{2}$	$\frac{n^2 + 3n - 6}{2}$
Lagrange	$n^2 - 1$	$2n$	$n^2 + 2n - 1$

A Condição $\frac{n^2 + 3n - 6}{2} < n^2 + 2n - 1$ é verdadeira $\forall n$: Entretanto, se várias funções devem ser interpoladas no mesmo intervalo, a interpolação de Lagrange pode se mais vantajosa, uma vez que os produtos dos denominadores são calculados apenas uma vez.

Ex.: Estimar $ln(2)$, a partir dos dados abaixo

i	x_i	$f(x_i)$
0	1	0
1	4	1.3862944
2	6	1.7917950

$$p_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) +$$
$$+ \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2)$$

$$p_2(2) = \frac{(2-4)(2-6)}{(0-4)(0-6)} \times 0 + \frac{(2-0)(2-6)}{(4-0)(4-6)} \times 1.3862944 +$$
$$+ \frac{(2-0)(2-4)}{(6-0)(6-4)} \times 1.791795$$

$$P_2(2) = 0.56584437$$

$$\ln 2 = 0.69314718$$

Interpolação por *Splines* Cúbicas

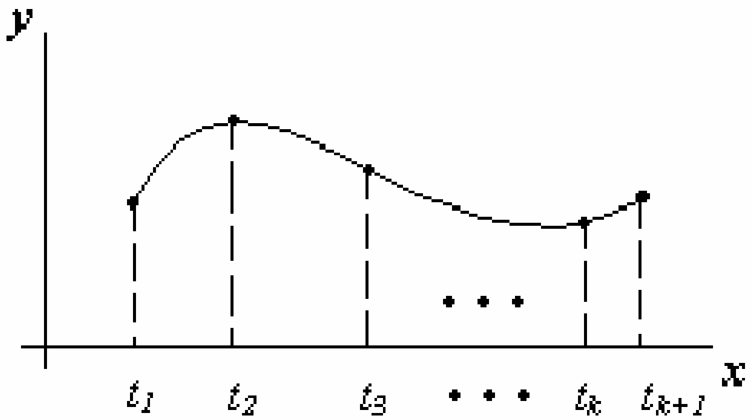
Splines *(régua flexível)*

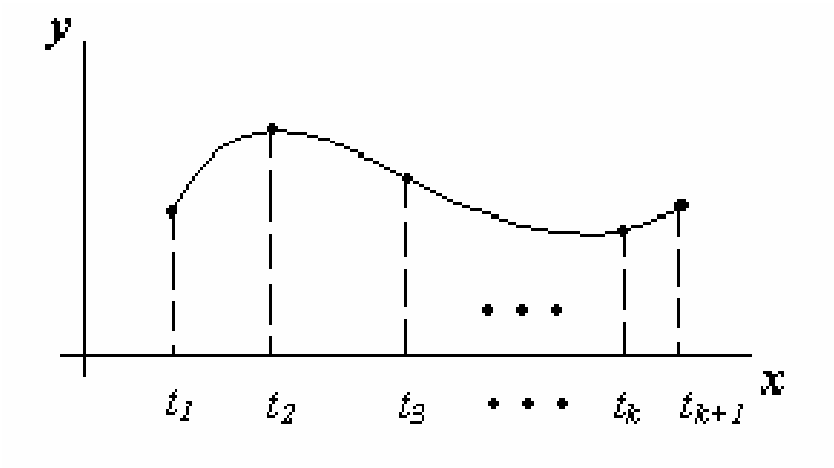
Em vez de se procurar determinar uma única função de grau elevado que reproduza o comportamento de um conjunto de pontos dentro de um intervalo, pode-se dividi-lo em subintervalos, a fim de permitir a utilização de várias funções de baixo grau (caso de polinômios).

A interpolação mais simples consiste em aproximar o comportamento da função entre dois pontos consecutivos por segmentos de reta.

Splines Cúbicas – Definição e dimensionamento do problema

Dado um intervalo $[a, b]$, dividido em k subintervalos $[t_i, t_{i+1}]$ com $i = 1, \dots, k$, pode-se definir, para cada um destes, uma seção polinomial cúbica, como polinômio interpolador da função a aproximar, como mostra a figura:





Definição:

$$p_i(x) = s_i(x) = a_{i0} + a_{i1}(x - t_i) + a_{i2}(x - t_i)^2 + a_{i3}(x - t_i)^3, \quad i = (1, 2, \ldots, k)$$

com as seguintes propriedades,

(i) $s_i(t_i) = s_{i+1}(t_i)$

isto resulta em $2k - 2$ equações

(ii) $s'_i(t_i) = s'_{i+1}(t_i)$

resultando em $k - 1$ equações

(iii) $s''_i(t_i) = s''_{i+1}(t_i)$

Os limites dos intervalos são chamados de nós. Aplicando a condição de erro de truncamento nulo para ambas as *splines* de um mesmo nó intermediário, obtém-se duas equações para cada um destes.

Essa condição produz ainda duas equações para os nós extremos. Considerando que existem $k+1$ nós, a condição de erro nulo gera então $[(k+1)-2]\cdot 2=(2k)$ equações.

A fim de garantir uma função interpoladora inteiramente diferenciável, é necessário que as derivadas à direita e à esquerda de cada nó intermediário sejam iguais. Isso resulta em $(k+1)-2=(k-1)$ equações.

Condição semelhante deve ser aplicada para as derivadas segundas, para garantir que os nós intermediários não são pontos de inflexão. Isso resulta em mais $(k-1)$ equações, totalizando $2k+2(k-1)=4k-2$ equações.

Cada *spline* é definida através da expressão:

$$s_i(x)=a_{io}+a_{i1}(x-t_i)+a_{i2}(x-t_i)^2+a_{i3}(x-t_i)^3$$

possuindo portanto 4 (quatro) coeficientes a determinar.

Existem assim $4k$ incógnitas e $4k-2$ equações.

A fim de eliminar esses dois graus de liberdade é comum exigir-se que as derivadas segundas se anulem nos pontos extremos do intervalo (*spline* natural).

Caso sejam conhecidas informações adicionais sobre a função a ser aproximada, como, por exemplo, as primeiras derivadas nos extremos, essa condição pode substituir a condição anterior.

Dedução do Algoritmo para Splines Cúbicas

Considerando que cada par de nós é conectado por uma *spline* cúbica então a derivada segunda desta *spline* é uma reta.

Representando essa reta, sob a forma de um polinômio de Lagrange, tem-se:

$$S_i''(x) = b_{i-1}\frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} + b_i\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

Notar que:

$$S_{i+1}''(x_i) = b_i\frac{x_i - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} + b_{i+1}\frac{x_i - x_i}{x_{i+1} - x_i} = b_i$$

$$S_i''(x_i) = b_i$$

Portanto, não há descontinuidade na 2ª derivada.

$$S_i'(x) = \int S_i''(x) + k_1 = \frac{b_{i-1}}{x_{i-1} - x_i}\int(x - x_i)\,dx + \frac{b_i}{x_i - x_{i-1}}\int(x - x_{i-1})\,dx + k_1$$
$$= b_{i-1}\frac{(x - x_i)^2}{2\cdot(x_{i-1} - x_i)} + b_i\frac{(x - x_{i-1})^2}{2\cdot(x_i - x_{i-1})} + k_1$$

$$S_i(x) = \int S_i'(x)\,dx = b_{i-1}\frac{(x - x_i)^3}{6\cdot(x_{i-1} - x_i)} + b_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6\cdot(x_i - x_{i-1})} + k_1x + k_2$$

$$k_1x + k_2 = c_i(x_i - x) + d_i(x - x_{i-1}) = (d_i - c_i)x + c_ix_i - d_ix_{i-1}$$

mas $S_i(x_{i-1}) = f(x_{i-1})$ e $S_i(x_i) = f(x_i)$

$$S_i(x_{i-1}) = b_{i-1}\frac{(x_{i-1}-x_i)^3}{6\cdot(x_{i-1}-x_i)} + c_i(x_i - x_{i-1}) = f(x_{i-1})$$

$$S_i(x_i) = b_i\frac{(x_i - x_{i-1})^2}{6} + d_i(x_i - x_{i-1}) = f(x_i)$$

$$c_i = \left\{\frac{f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} - b_{i-1}\frac{(x_i - x_{i-1})^2}{6}\right\}\cdot\frac{1}{(x_i - x_{i-1})}$$

$$d_i = \left\{\frac{f(x_i)}{x_i - x_{i-1}} - b_i\frac{(x_i - x_{i-1})^2}{6}\right\}\cdot\frac{1}{(x_i - x_{i-1})}$$

Assim:

$$S_i(x) = b_{i-1}\frac{(x-x_i)^3}{6(x_{i-1}-x_i)} + b_i\frac{(x-x_{i-1})^3}{6(x_i - x_{i-1})} + C(x_i - x) + D(x - x_{i-1}) \quad (*)$$

onde:

$$C = \left[\frac{f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} - b_{i-1}\frac{x_i - x_{i-1}}{6}\right]$$

$$D = \left[\frac{f(x_i)}{x_i - x_{i-1}} - b_i\frac{x_i - x_{i-1}}{6}\right]$$

Notar que:

$$S_i(x_i) = \frac{b_i}{6}(x_i - x_{i-1})^2 + \left[f(x_i) - \frac{b_i}{6}(x_i - x_{i-1})^2\right] = f(x_i)$$

$$S_{i+1}(x_i) = \frac{b_i}{6}(x_i - x_{i-1})^2 + \left[\frac{f(x_i)}{x_{i+1}-x_i} - \frac{b_i}{6}(x_{i+1}-x_i)\right](x_{i+1}-x_i) = f(x_i)$$

Portanto, não há descontinuidade.

Derivando (*), tem-se:

$$S_i'(x) = b_{i-1}\frac{(x-x_i)^2}{2(x_{i-1}-x_i)} + b_i\frac{(x-x_{i-1})^2}{2(x_i-x_{i-1})} + f[x_i, x_{i-1}] + \frac{x_i - x_{i-1}}{6}(b_{i-1}-b_i)$$

Por analogia:

$$S_{i+1}'(x) = b_i\frac{(x-x_{i+1})^2}{2(x_i-x_{i+1})} + b_{i+1}\frac{(x-x_i)^2}{2(x_{i+1}-x_i)} + f[x_{i+1}, x_i] + \frac{x_{i+1} - x_i}{6}(b_i-b_{i+1})$$

$$S_{i+1}'(x_i) = \frac{b_i}{2}(x_i - x_{i+1}) + f[x_{i+1}, x_i] + (x_{i+1}-x_i)\frac{(b_i - b_{i+1})}{6}$$

$$S_i'(x_i) = \frac{b_i}{2}(x_i - x_{i-1}) + f[x_i, x_{i-1}] + (x_i-x_{i-1})\frac{(b_{i-1} - b_i)}{6}$$

$$= (x_i - x_{i-1})\left(-\frac{2b_i + b_{i-1}}{6}\right) + f[x_i, x_{i-1}] =$$

$$= S_{i+1}'(x_i) = (x_{i+1} - x_i)\left(\frac{-2b_i - b_{i+1}}{6}\right) + f[x_{i+1}, x_i]$$

$$(x_i - x_{i-1})\frac{2b_i}{6} + (x_i - x_{i-1})\frac{b_{i-1}}{6} + \frac{2b_i}{6}(x_{i+1}-x_i) + \frac{b_{i+1}}{6}(x_{i+1}-x_i)$$
$$= \{\mathrm{f}[\mathrm{x}_{i+1}, \mathrm{x}_i] - \mathrm{f}[\mathrm{x}_i, \mathrm{x}_{i-1}]\} \cdot 6$$

$$(x_i - x_{i-1})b_{i-1} + 2(x_{i+1}-x_{i-1})b_i + (x_{i+1}-x_i)b_{i+1} = \\ = 6\{f[x_{i+1}, x_i] - f[x_i, x_{i-1}]\} \qquad (**)$$

onde:

$$= \{\mathrm{f}[\mathrm{x}_{i+1}, \mathrm{x}_i] - \mathrm{f}[\mathrm{x}_i, \mathrm{x}_{i-1}]\} = \left\{\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1}-x_i} - \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right\}$$

para $i = 1, \cdots, k-1$

A equação correspondente a $i = 1$ possui 3 incógnitas: b_0, b_1, b_2, mas na equação de $i = 2$, aparecem $b_1, b_2 \; e \; b_3$, i.e., uma única incógnita adicional.

Generalizando, a adição da *j-ésima* equação, p/ $j = 2, \ldots, k + 1$, faz surgir apenas uma incógnita a mais.

Portanto, existem $\left[(k - 1) - 2 + 1 + 3\right] = k + 1$ incógnitas.

Como o sistema acima define apenas $(k - 1)$ equações, as duas incógnitas restantes podem ser obtidas a partir da condição de *spline* natural:

$$S_i''(x_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad b_0 = 0$$

e

$$S_k''(x_k) = 0 \quad \Rightarrow \quad b_{k-1} \frac{x_k - x_k}{x_{k-1} - x_k} + b_k \frac{x_k - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} = 0 \quad \Rightarrow \quad b_k = 0$$

Ex.1: Representar por *splines* cúbicas:

i	0	1	2	3
x_i	0	$\pi/3$	$2\pi/3$	π
y_i	0	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/2$	0

Nesse caso $k = 3$ *splines*.

Portanto, a equação (**) deve ser escrita por $i = 1$ e $i = 2$:

$$(x_1 - x_0)b_0 + 2(x_2 - x_0)b_1 + (x_2 - x_1)b_2 = 6\{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]\}$$

$$(x_2 - x_1)b_1 + 2(x_3 - x_1)b_2 + (x_3 - x_2)b_3 = 6\{f[x_3, x_2] - f[x_2, x_1]\}$$

Splines naturais $\Rightarrow \begin{cases} \mathrm{b}_0 = 0 \\ \mathrm{b}_3 = 0 \end{cases}$

$$\frac{4\pi}{3}b_1 + \frac{\pi}{3}b_2 = 6\left\{0 - \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\right\}$$

$$\frac{\pi}{3}b_1 + \frac{4\pi}{3}b_2 = 6\left\{\frac{-3\sqrt{3}}{2\pi} - 0\right\}$$

Usando um método qualquer para resolução de sistemas de equações lineares, obtem-se:

$$b_1 = b_2 = \frac{-27\sqrt{3}}{5\pi^2} = -0{,}9477$$

Após determinados b_1 e b_2, definem-se as *splines*:

$$s_1 = \frac{b_0}{6}\frac{(x-x_1)^3}{x_0-x_1} + \frac{b_1}{6}\frac{(x-x_0)^3}{x_1-x_0} - c_1(x-x_1) + d_1(x-x_0); \text{Para}: 0 \le x \le \frac{\pi}{3}$$

$$c_1 = \frac{f(x_0)}{x_1-x_0} - \frac{b_0}{6}(x_1-x_0) \ ; \ d_1 = \frac{f(x_1)}{x_1-x_0} - \frac{b_1}{6}(x_1-x_0)$$

$$s_2 = \frac{b_1}{6}\frac{(x-x_2)^3}{x_1-x_2} + \frac{b_2}{6}\frac{(x-x_1)^3}{x_2-x_1} - c_2(x-x_2) + d_2(x-x_1); \text{Para}: \frac{\pi}{3} \le x \le \frac{2\pi}{3}$$

$$c_2 = \frac{f(x_1)}{x_2-x_1} - \frac{b_1}{6}(x_2-x_1) \ ; \ d_2 = \frac{f(x_2)}{x_2-x_1} - \frac{b_2}{6}(x_2-x_1)$$

$$s_3 = \frac{b_2}{6}\frac{(x-x_3)^3}{x_2-x_3} + \frac{b_3}{6}\frac{(x-x_2)^3}{x_3-x_2} - c_3(x-x_3) + d_3(x-x_2); \text{Para}: \frac{2\pi}{3} \le x \le \pi$$

$$c_3 = \frac{f(x_2)}{x_3-x_2} - \frac{b_2}{6}(x_3-x_2) \ ; \ d_3 = \frac{f(x_3)}{x_3-x_2} - \frac{b_3}{6}(x_3-x_2)$$

Efetuando-se os cálculos, obtém-se:

$$s_1 = -0{,}1508x^3 + 0{,}0000x^2 + 0{,}9924x + 0{,}0000 ; \quad \text{Para}: 0 \le x \le \frac{\pi}{3}$$

$$s_2 = 0{,}0000x^3 - 1{,}4738x^2 + 1{,}4886x - 0{,}1732 ; \quad \text{Para}: \frac{\pi}{3} \le x \le \frac{2\pi}{3}$$

$$s_3 = 0{,}1508x^3 - 1{,}4215x^2 + 3{,}4734x - 1{,}5588 ; \quad \text{Para}: \frac{2\pi}{3} \le x \le \pi$$