# CÁLCULO DE RAÍZES DE EQUAÇÕES NÃO LINEARES

## Introdução

Em diversos campos da Engenharia é comum a necessidade da determinação de raízes de equações não lineares.

Em alguns casos particulares, como no caso de polinômio, que são funções algébricas não lineares com propriedades particulares, é possível a solução analítica para o caso de polinômios do 2° grau e certas classes de polinômios de 3º e 4º graus.

No caso de funções transcendentais que são funções não lineares e não algébricas a determinação só é possível de forma numérica.

Ex.: $f(x) = e^x - x$

$$f(x) = ln(x^2) + sen(x)$$

Serão apresentados a seguir os principais métodos numéricos para determinação de raízes de equações não lineares. Tais métodos que podem ser divididos em:

$$\text{Métodos Fechados}\begin{cases}\text{Método da Bisseção;}\\ \text{Método das cordas;}\\ \text{dentre outros ...}\end{cases}$$

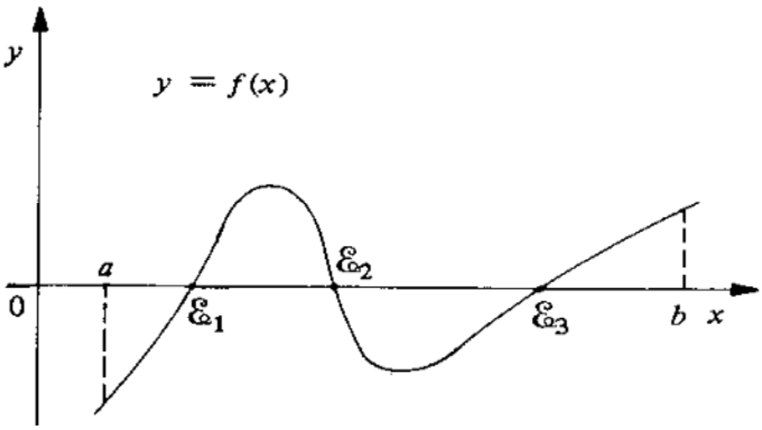
$$\text{Métodos Abertos}\begin{cases}\text{Método de Newton;}\\ \text{Método da Secante;}\\ \text{e outros ...}\end{cases}$$

Seja $f(x)$ uma função não-linear com $f(x_0) = 0$. Encontrar os valore de $x_o$ que satisfaçam tal igualdade constitui um problema de determinação das raízes de $f(x)$. Para tanto, são necessárias os seguintes passos:

a) Isolar uma raiz, i. e., encontrar um intervalo $[a, b]$, contendo uma única raiz de $f(x_0) = 0$;
b) Partindo de uma estimativa inicial da raiz, refiná-la até alcançar a precisão desejada.

## Isolamento de raízes

*Teorema 1*: Seja $f$ contínua em [a, b]. Se $f(a) \cdot f(b) < 0$, então $\exists\ \varepsilon \in (a,b)$ tal que $f(\varepsilon) = 0$.




Além disso, se $f'(x) > 0$ ou $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (a,b)$, então a raiz é única.

## Equações Algébricas – Propriedades

a) Seja $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$ uma equação algébrica de grau $n\,(a_n \neq 0)$. Então $p(x)$ possui $n$ raízes.
b) Se os coeficientes são reais, então, as raízes complexas são pares complexos conjugados, de mesma multiplicidade.

## Limites das raízes

Consideremos o polinômio $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$, com $a_n \neq 0$ e $a_i \in R$.

Seja $\varepsilon_p$ a maior das raízes positivas de $p(x)$, temos que $\varepsilon_p \leq L$, com:

$$L = 1 + \sqrt[n-k]{\frac{B}{a_n}} \quad \text{onde:} \begin{cases} \boldsymbol{K} & \rightarrow \text{Maior índice dos coeficientes negativos} \\ \boldsymbol{B} & \rightarrow \text{Máximo módulo dentre os coeficientes negativos} \end{cases}$$

Seja ainda a seguinte equação auxiliar: $p_1(x) = x^n p(1/x) = 0$, com $L_1$ sendo: $1/\varepsilon_1, 1/\varepsilon_2, \cdots, 1/\varepsilon_n$ suas raízes e $L_1$ o limite superior de suas raízes positivas $\left(1/\varepsilon_p \leq L_1 \therefore \varepsilon_p \geq 1/L_1\right)$. Logo, $1/L_1$ é o limite inferior das raízes positivas de $p(x)$ $\left(1/L_1 \leq \varepsilon_p \leq L\right)$.

Seja agora $p_2(x) = p(-x) = 0$. Suas raízes são: $-\varepsilon_1, \cdots, -\varepsilon_n$. Sendo $-\varepsilon_q$ $(\varepsilon_q < 0)$ a maior das raízes positivas, tem-se:

$$-\varepsilon_q \leq L_2 \text{ ou } \varepsilon_q \geq \underbrace{-L_2}_{\substack{\text{limite inferior} \\ \text{das raízes negativas}}}$$

Por fim, considerando o polinômio: $p_3(x) = x^n p(-1/x)$, tem-se:

$$-\frac{1}{\varepsilon_q} \leq L_3 \therefore \varepsilon_q \leq \underbrace{-1/L_3}_{\substack{\text{limite superior} \\ \text{das raízes negativas}}}$$

*Exemplo*:

$$p(x) = x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 29x + 30 = 0$$

$$p_1(x) = x^4 p(1/x) = 1 - 5x - 7x^2 + 29x^3 + 30x^4 = 0$$

$$p_2(x) = p(-x) = x^4 + 5x^3 - 7x^2 - 29x + 30 = 0$$

$$p_3(x) = x^4 p(-1/x) = 1 + 5x - 7x^2 - 29x^3 + 30x^4 = 0$$

para $p(x)$: $k = 3$ , $B = 7$ $\Rightarrow$ $L = 1 + \sqrt[4-3]{\dfrac{7}{1}} = 2$

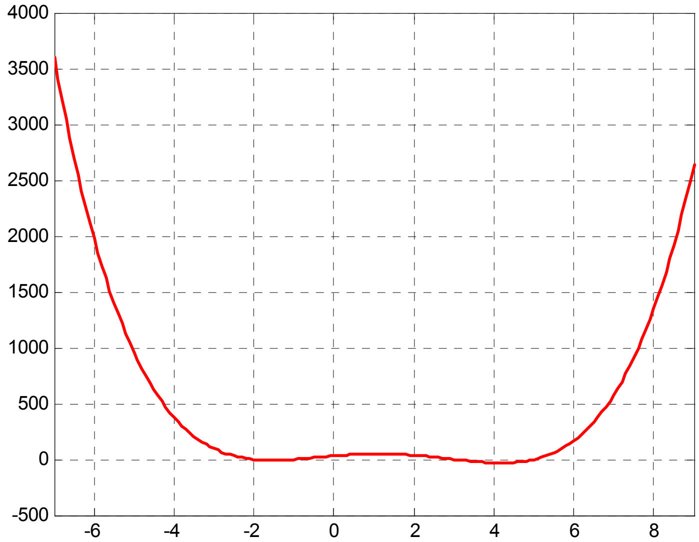
para $p_1(x)$: $k = 2$ , $B = 7$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} L_1 = 1 + \sqrt[4-2]{\dfrac{7}{30}} = 1{,}483 \\ 1/L_1 = 0{,}674 \end{cases}$

para $p_2(x)$: $k = 2$ , $B = 29$ $\Rightarrow$ $L_2 = 1 + \sqrt[4-2]{\dfrac{29}{1}} = 6{,}385$

para $p_3(x)$: $k = 3$ , $B = 29$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} L_3 = 1 + \sqrt[4-3]{\dfrac{29}{30}} = 1{,}967 \\ -1/L_3 = -0{,}508 \end{cases}$

Portanto:

$$\begin{cases} 0{,}674 \le \varepsilon_p \le 8 \\ -6{,}385 \le \varepsilon_n \le -0{,}508 \end{cases}$$

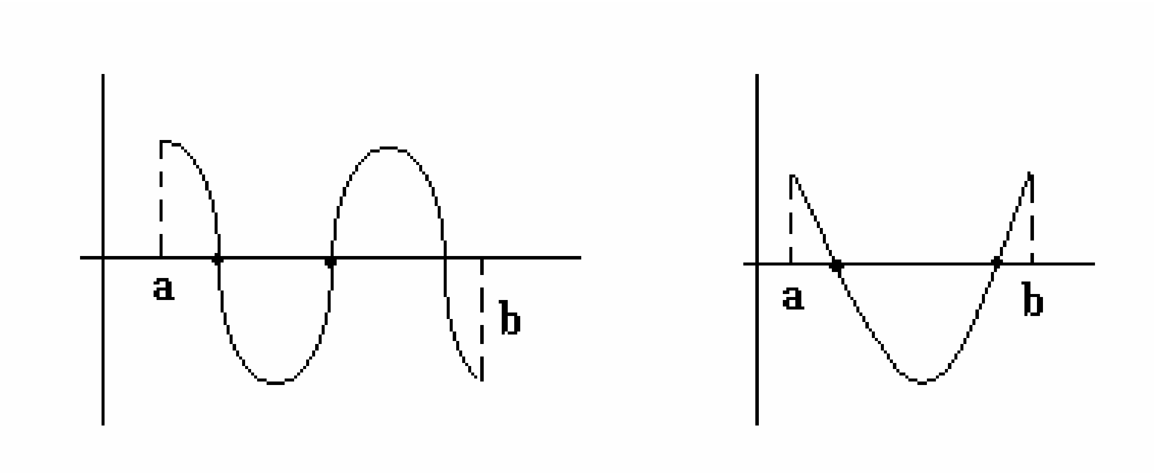


## Número de raízes

Teorema de Bolzano

$$p(x)=0 \ ; \ x\in(a,b)$$

se $\begin{array}{ll} p(a)\cdot p(b)<0 \ \Rightarrow & n^o \ \text{ímpar de raízes} \\ p(a)\cdot p(b)>0 \ \Rightarrow & n^o \ \text{par de raízes} \end{array}$




## Relações entre raízes e coeficientes *(Relações de Girard)*

Seja $p(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ na forma fatorada: $p(x)=a_n(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)\cdots(x-\varepsilon_n)=0$.

Efetuando algumas operações algébricas (somas e multiplicações) e igualando os coeficientes dos termos de mesmo expoente, obtemos as seguintes relações:

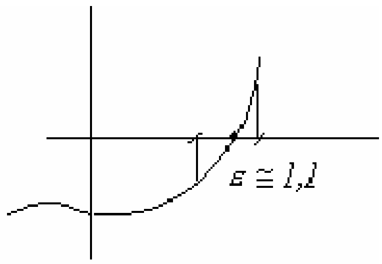
$$\begin{gathered}
\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n=-a_{n-1}/a_n \\
(\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_1\varepsilon_3+\cdots+\varepsilon_1\varepsilon_n)+(\varepsilon_2\varepsilon_3+\cdots+\varepsilon_2\varepsilon_n)+\cdots+\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n=a_{n-2}/a_n \\
\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3+\cdots \quad \cdots \quad \cdots+\varepsilon_{n-2}\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n=-a_{n-3}/a_n \\
\vdots \\
\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\cdots \ \cdots\varepsilon_n=(-1)^n a_0/a_n
\end{gathered}$$

## Equações Transcedentes: Funções de Naturezas Distintas

### Isolamento de raízes – Método gráfico

Exemplo:

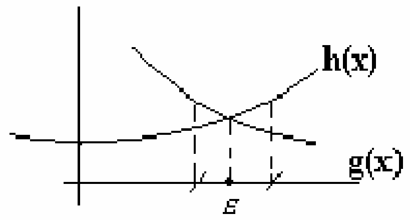
$$f(x) = e^x - sen(x) - 2$$




Outra forma:

$$f(x) = g(x) - h(x) = 0$$

$$\begin{cases} g(x) = e^x \\ h(x) = sen(x) + 2 \end{cases}$$




## Exatidão da Raiz

Teorema: Seja $\varepsilon$ uma raiz exata de $f(x) = 0$ e $x_n$ uma aproximação sua. Seja ainda:

$$m = \min_{a \le x \le b} |f'(x)|$$

i.e.:

$$|f'(x)| \ge m > 0, \quad \forall\ b \le x \le a.$$

Então: $|x_n - \varepsilon| \le \dfrac{|f(x_n)|}{m}$

Prova: De acordo com o teorema do valor médio, tem-se:

$$f(x_n) - f(\varepsilon) = (x_n - \varepsilon) \cdot f'(c) \text{ , sendo } \varepsilon < c < x_n$$

$$|f(x_n) - f(\varepsilon)| = |x_n - \varepsilon| \cdot f'(c) \text{ ; } f(\varepsilon) = 0$$

$$|f'(c)| = \frac{|f(x_n)|}{|x_n - \varepsilon|} \geq m$$

Logo: $|x_n - \varepsilon| \leq \dfrac{|f(x_n)|}{m}$

Como o cálculo da derivada, para determinação de *m* nem sempre é possível, costuma-se usar um dos critérios abaixo, para teste de convergência:

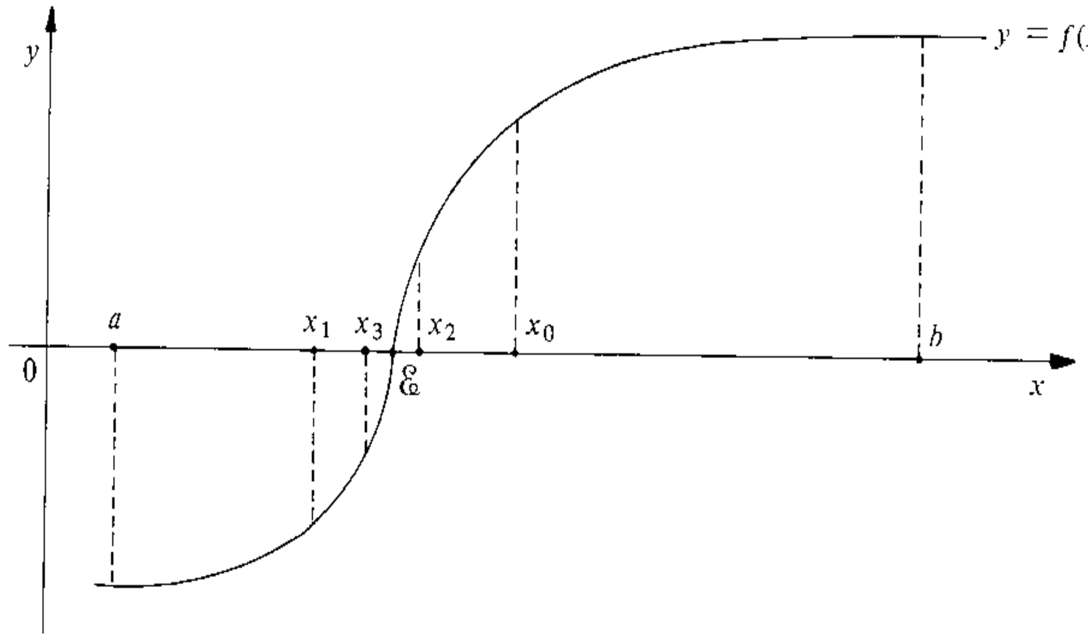
1º) $|f(x_n)| \leq \underbrace{\in}_{\substack{tolerância \\ prefixada}}$

2º) $|x_n - x_{n-1}| \leq \in$

3º) $\dfrac{|x_n - x_{n-1}|}{|x_n|} \leq \in$

## Método da Bisseção

Seja $f(x)$ contínua no intervalo $[a,b]$, com $f(a) \cdot f(b) < 0$, conforme mostra o gráfico a seguir:




Divide-se o intervalo ao meio, definindo o ponto $x_0$ e calcula-se o valor de $f(x_0)$, comparando o seu sinal com $f(a)$ e com $f(b)$. Concentra-se a atenção naquele subintervalo com $f(x_i) \cdot f(x_f) < 0$. O processo é repetido até se alcançar a convergência.

- O método possui uma taxa de convergência linear;
- Sempre converge para uma solução, e;
- Possui fácil implementação computacional.

## Algoritmo:

1 - Encontrar $x_i$ e $x_f$, tal que $f(x_i)\, f(x_f) < 0$;

2 - Determinar $x_m = \dfrac{x_i + x_s}{2}$;

3- Comparar o sinal da função em $x_m$

3.1 - Se $f(x_m) = 0$ então $x_m$ é a raiz da função, pare os cálculos

3.2 - Se $f(x_i)\, f(x_m) < 0$ a raiz está no subintervalo $[x_i, x_m]$; assim o $x_f = x_m$ e $x_i$ permanece

Caso contrário a raiz está no subintervalo $[x_m, x_f]$; assim $x_i = x_m$ e $x_f$ permanece;

4 - Retornar para o passo 2 e calcular o novo $x_m$;

5 - Verificar se o tamanho do intervalo é inferior à precisão desejada.

Caso isso não aconteça, retornar ao passo 3.

6 - Apresentar o resultado do cálculo.

Ex.: Determine a raiz de $f(x) = e^{-x} - x$ com $tol = 10^{-2}$, $x_i = 0$ e $x_f = 1$.

Já que: $|x_i - x_f| = |1 - 0| > tol,$ ,calcular:

$$x_m = \frac{x_i + x_f}{2} = 0,5$$

Como $f(x_i).f(x_m) = f(0).f(0,5) = 0,10653 > 0,$

então descartar $x_i = 0.$

Como $f(x_m).f(x_f) = f(0,5).f(1) < 0$ e $|1 - 0,5| > tol$

$x_i = \leftarrow x_m$ e calcular novamente

$$x_m = \frac{0,5 + 1}{2} = 0,75$$

Como $f(x_i).f(x_m) = f(0,5).f(0,75) < 0$ e $|0,75 - 0,5| > tol$

então $x_f = \leftarrow x_m$ e calcular novamente:

$$x_m = \frac{0,5 + 0,75}{2} = 0,625$$

Como $f(x_i).f(x_m) = f(0,5).f(0,625) = -0,01 < 0$ e $|0,625 - 0,5| > tol$

então $x_f = \leftarrow x_m$ e calcular novamente:

$$x_m = \frac{0,5 + 0,625}{2} = 0,5625$$

Como $f(0,5625).f(0,625) < 0$ e $|0,625 - 0,5625| < tol$

Então $\boxed{x_m = raiz = 0,5625}$

## *Convergência*

Na n-ésima iteração, o comprimento do intervalo a considerar é:

$$\frac{b-a}{2^n}$$

Para o 1º subintervalo: $|x_0 - a| = \frac{b-a}{2^1}$

Para o 2º subintervalo: $|x_1 - x_0| = \frac{b-a}{2^2}$

Generalizando: $|x_n - x_{n-1}| = \frac{b-a}{2^{n+1}}$

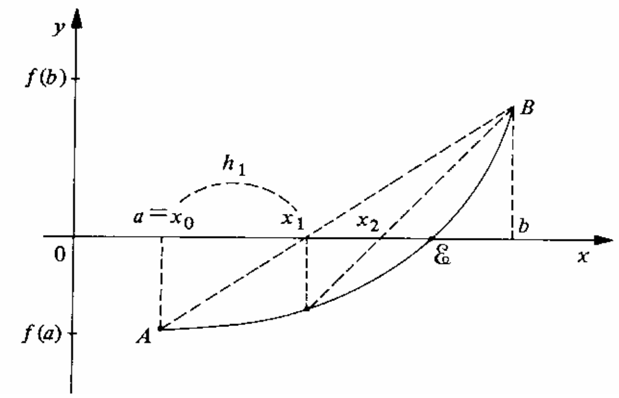
Como $|x_n - x_{n-1}| \leq \in$ tem-se: $\frac{b-a}{2^{n+1}} \leq \in$

ou: $n \geq \frac{ln[(b-a)/\in]}{ln(2)} - 1$

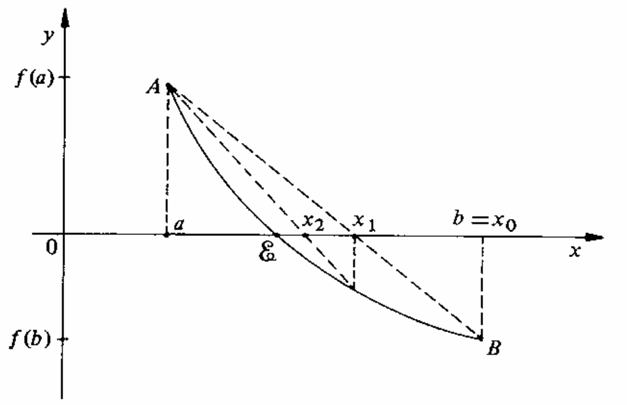
Como $\lim_{n\to\infty} |x_n - x_{n-1}| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{b-a}{2^{n+1}}\right) = 0$, tem-se que o processo converge, i. e., $x_n = x_{n-1} = \varepsilon$, pois $f(x_n) \cdot f(x_{n-1}) \leq 0$

## Método das Cordas

Aplica-se a uma função contínua $f(x)$ com raiz única $\varepsilon \in [a,b]$, com $f''(x)$ com sinal constante.




(1)




(2)

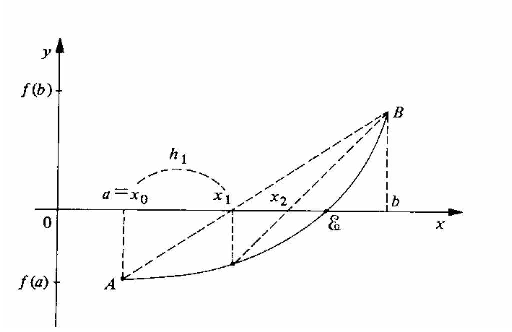
Realiza-se uma interpolação linear entre os pontos extremos do intervalo e calcula-se a raiz ( $x_1$ ) da reta interpoladora.

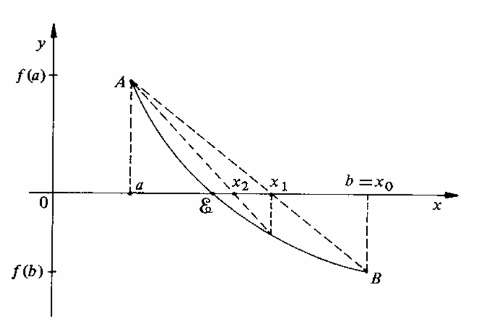
$(x_1, f(x_1))$ substituirá o ponto com ordenada de mesmo sinal que $f(x_1)$, a fim de repetir o processo, até que haja convergência.

$$\frac{x_1 - a}{-f(a)} = \frac{b - a}{f(b) - f(a)}$$

ou:

$$\frac{b - x_1}{f(b)} = \frac{b - a}{f(b) - f(a)} \Leftrightarrow x_1 = b - \frac{b - a}{f(b) - f(a)} \cdot f(b)$$




(1) (2)

Para a figura (1), tem-se:

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f(a) - f(b)} \cdot (a - b) \quad \to \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(b)} \cdot (x_n - b)$$

Para a figura (2), tem-se:

$$x_1 = b + \frac{f(b)}{f(a) - f(b)} \cdot (b - a) \quad \to x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(a)} \cdot (x_n - a)$$

Generalizando: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f(x_n) - f(c)} \cdot (x_n - c)$

onde $c$ é um ponto da função onde esta tem o mesmo sinal de sua derivada segunda, i.e., $f(c) \cdot f''(c) > 0$.

Resumindo:

- O ponto fixado ($a$ ou $b$) é aquele onde o sinal da função $\left(f(x)\right)$ coincide com o sinal de sua derivada segunda $\left(f''(x)\right)$.
- A aproximação $x_n$ se faz do lado da raiz $\varepsilon$, onde o sinal da função $\left(f(x)\right)$ é oposto ao sinal de sua derivada segunda $\left(f''(x)\right)$.

## *Convergência*

A aproximação $x_{n+1}$ estará sempre mais próxima que a anterior $x_n$.

Considerando:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n) = \bar{\varepsilon}; \qquad (a < \bar{\varepsilon} < b)$$

tem-se:

$$\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}) = \lim_{n\to\infty}(x_n) - \lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(x_n)}{f(a)-f(x_n)}\cdot(a-x_n)\right)$$

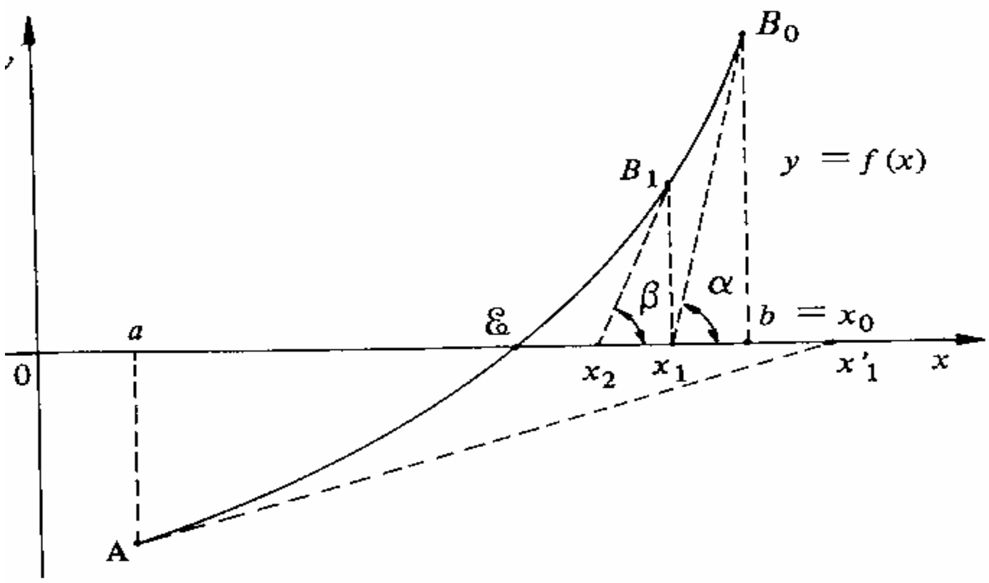
$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\bar{\varepsilon} \quad = \quad \bar{\varepsilon} \quad - \frac{f(\bar{\varepsilon})}{f(a)-f(\bar{\varepsilon})}\cdot(a-\bar{\varepsilon}) \quad \Rightarrow \quad f(\bar{\varepsilon}) = 0$$

Portanto, como a raiz é única, $\bar{\varepsilon} = \varepsilon$ e o processo converge.

# Método de Newton

## Interpretação Gráfica




Dedução pela geometria:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - 0}{x_i - x_{i+1}}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Dedução pela série de Taylor:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + f''(x_i)\frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2!} + \ldots$$

truncando a série e considerando $f(x_{i+1}) \approx 0$ então

$0 \approx f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i)$ obtendo-se:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Observações:

- O método pode divergir caso existam pontos de máximo ou mínimo da função no intervalo de busca.
- Se a função possuir múltiplos zeros, a convergência tornar-se-á lenta.

Ex.: Determine a raiz da equação: $e^{-x} - x = 0$, pelo método de Newton.

$f'(x) = -e^{-x} - 1$, $x_{i+1} = x_i - \dfrac{e^{-x_i} - x_i}{-e^{-x_i} - 1}$; considere $i = 0$, $x_0 = 0$

| *Iterações* | $x_i$ | $\lvert\varepsilon\rvert$ % |
|---|---|---|
| *0* | *0* | *100* |
| *1* | *0.50000000* | *11.8* |
| *2* | *0.56631103* | *0.147* |
| *3* | *0.56714316* | *0.000022* |
| *4* | *0.56714329* | $< 10^{-8}$ |

Ex.: (Exemplo de convergência lenta do método de Newton), cálculo da raiz real positiva da equação: $x^{10} - 1 = 0$, (Considere $x_0 = 0.5$).

| *Iterações* | $x_i$ |
|---|---|
| *0* | *0.5* |
| *1* | *51.65* |
| *2* | *46.485* |
| *3* | *41.8365* |
| *4* | *37.65285* |
| *5* | *33.887565* |

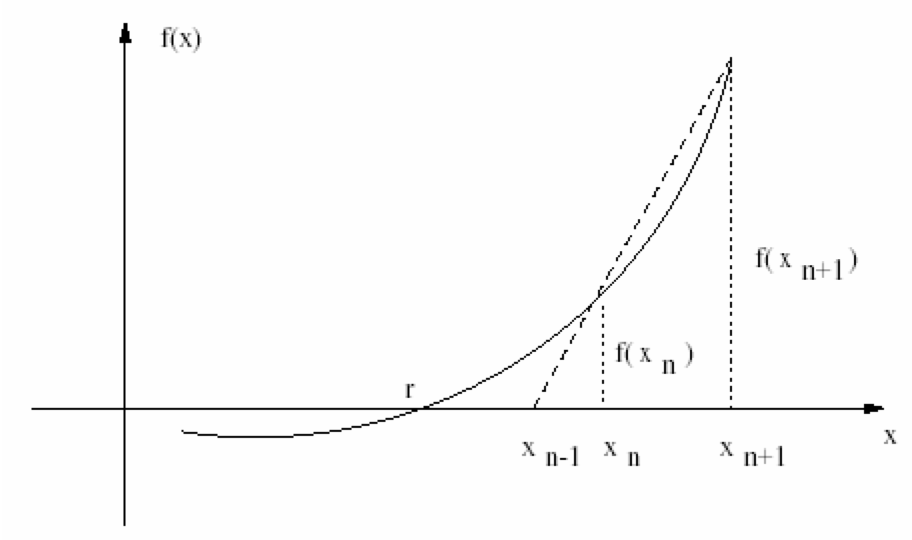
## Método da Secante

É uma modificação do método de Newton.

A derivada é substituída por uma estimada de forma numérica.

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i-1}) - f(x_i)}{x_{i-1} - x_i}$$

Interpretação Gráfica do Método:




Substituindo a estimativa numérica da derivada na expressão iterativa do método de Newton, tem-se:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)}$$

Ex.: Determine a raiz da equação $f(x) = e^{-x} - x$ ; $x_r = 0.56714329$.

1ª iteração, $x_{-1} = 0$, $x_0 = 1$, $f(x_{-1}) = 1.0$, $f(x_0) = -0.63212$

$$x_1 = 1 - \frac{-0.63212(0-1)}{1-(-0.63212)} = 0.61270$$

2ª iteração, $x_0 = 1$, $x_1 = 0.61270$, $f(x_0) = -0.63212$, $f(x_1) = -0.07081$

$$x_2 = 0.61270 - \frac{-0.63212(1-0.61270)}{-0.63212-(-0.07081)} = 0.5684$$

O método converge um pouco mais lentamente que o método de Newton e com mais esforço computacional.