Descrições Espaciais e Transformações

Descrições Espaciais e Transformações

- Descrever objetos no espaço 3D;
- Formulação matemática consistente;
- Sistema coordenado universal

Notação

- **Vetores e Matrizes** — Letra Maiúscula
- **Escalares** — Letra Minúscula
- **Referenciais** — Sobrescrito e Subscrito precedentes

^{A}P — vetor de posição *P* descrito no referencial {A}

$^{A}_{B}R$ — matriz de rotação que especifica a relação entre os referenciais {A} e {B}

Notação

- Inverso, transposição

$$R^{-1}\ ,\quad R^{T}$$

- Subscritos suscedentes — nenhuma convenção específica.

P_{bolt} — posição de um parafuso

- Funções trigonométricas

$$\cos\theta_1 = c\theta_1 = c_1$$

Descrições: Posição, Orientação e Referenciais

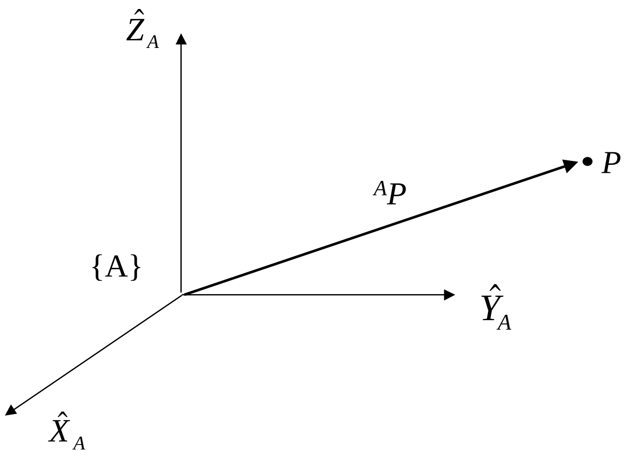
- Descrição de Posição
- Descrição Orientação

Descrição de Posição

- POSIÇÃO — Definida em relação a um referencial pelo vetor ${}^{A}P$ *(3 x 1)*, denominado Vetor de Posição, que é o vetor P descrito em relação ao referencial {A}:

$$
{}^{A}P = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix}
$$

Descrição de Posição



Descrição de Orientação

- ORIENTAÇÃO — de um referencial afixado num corpo, descrita pela Matriz de Rotação ${}^{A}_{B}R$ *(3 x 3)*, composta pelos vetores unitários das direções principais de um referencial {B}, representados no referencial{A}:

$$
{}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} {}^{A}X_{B} & {}^{A}Y_{B} & {}^{A}Z_{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}
$$

Descrição de Orientação

- Cosenos Diretores

$$ {}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} \hat{X}_B \bullet \hat{X}_A & \hat{Y}_B \bullet \hat{X}_A & \hat{Z}_B \bullet \hat{X}_A \\ \hat{X}_B \bullet \hat{Y}_A & \hat{Y}_B \bullet \hat{Y}_A & \hat{Z}_B \bullet \hat{Y}_A \\ \hat{X}_B \bullet \hat{Z}_A & \hat{Y}_B \bullet \hat{Z}_A & \hat{Z}_B \bullet \hat{Z}_A \end{bmatrix} $$

$a \bullet b = |a| \, |b| \, \cos\theta$

Como $|a| = |b| = 1$, então, $a \bullet b = \cos\theta$.

Descrição de Orientação

$$ {}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} {}^{A}\hat{X}_B & {}^{A}\hat{Y}_B & {}^{A}\hat{Z}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{B}\hat{X}_A^T \\ {}^{B}\hat{Y}_A^T \\ {}^{B}\hat{Z}_A^T \end{bmatrix} $$

Portanto, pode-se afirmar que:

$$ {}^{B}_{A}R = {}^{A}_{B}R^T $$

Isto sugere que o inverso da matriz de rotação é igual a sua transposta, como mostrado a seguir.

Descrição de Orientação

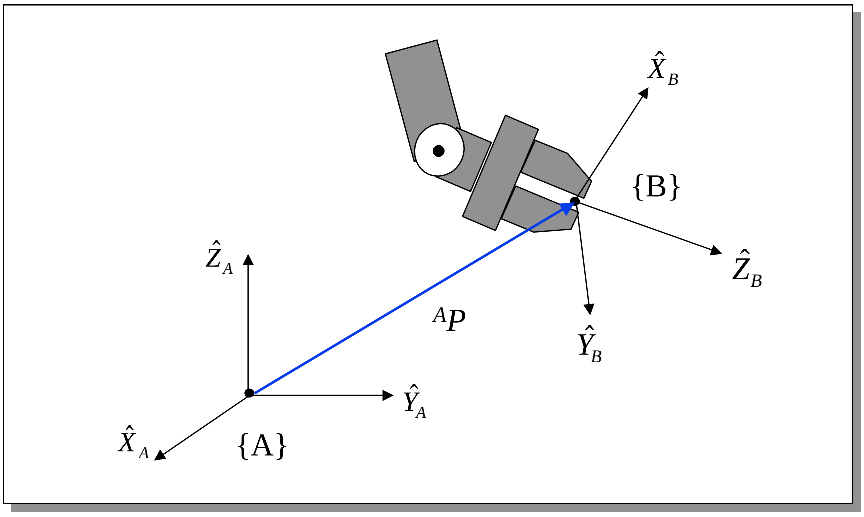
$$ {}^{B}_{A}R\,{}^{A}_{B}R^{T} = \begin{bmatrix} {}^{A}\hat{X}_B^{T} \\ {}^{A}\hat{Y}_B^{T} \\ {}^{A}\hat{Z}_B^{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{A}\hat{X}_B & {}^{A}\hat{Y}_B & {}^{A}\hat{Z}_B \end{bmatrix} = I_3 $$

Onde I_3 é a matriz identidade *3x3*. Portanto:

$$ {}^{A}_{B}R = {}^{B}_{A}R^{-1} = {}^{B}_{A}R^{T} $$

pela comutatividade do produto escalar.

Posição e Orientação

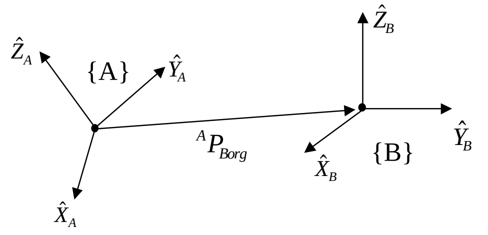


Descrição de um referencial

- REFERENCIAL — um par constituído de:

  {ORIENTAÇÃO, POSIÇÃO}

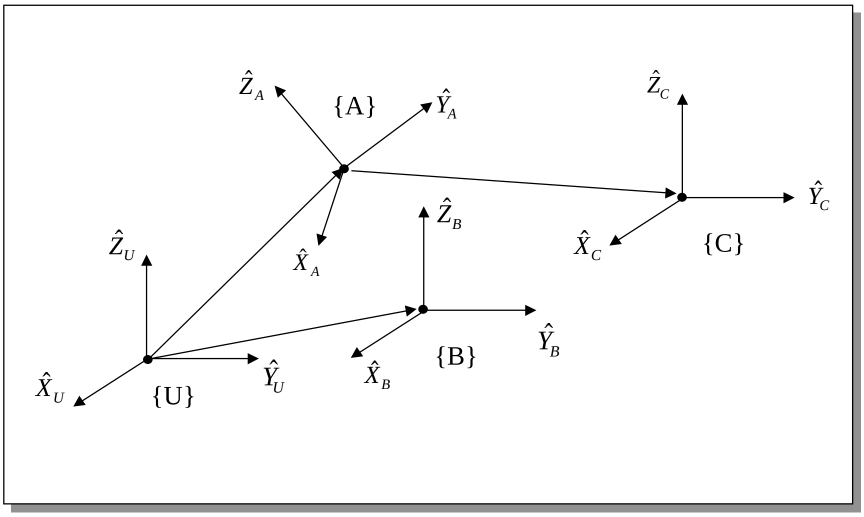
$$\{B\} = \{ {}^{A}_{B}R, {}^{A}P_{Borg} \}$$



Descrição de um referencial

- Um referencial (frame) é uma entidade composta de 4 vetores que fornecem informação de posição e orientação. Na figura a seguir, um desses vetores indica a posição das pontas dos "dedos" da garra, e três outros indicam a sua orientação.
- Por outro lado, um referencial nada mais é do que um sistema coordenado, ao qual, além da orientação, é fornecido um vetor de posição que descreve sua origem em relação a um outro referencial.

Representação Gráfica de Referenciais

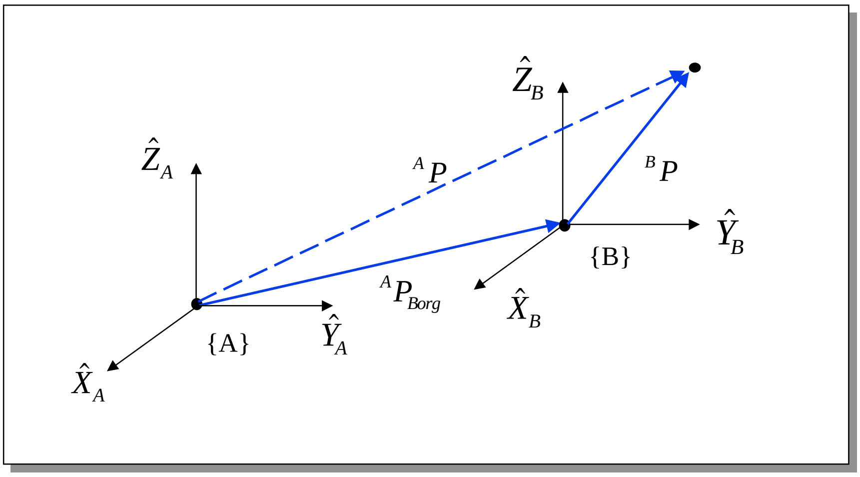


Mapeamentos

- Utilizados para mudar descrições de um referencial para outro referencial.
- Mapeamentos envolvendo referenciais transladados (sem rotação relativa):

$$^{A}P = {}^{B}P + {}^{A}P_{Borg}$$

Referenciais Translados



Referenciais Rotacionados

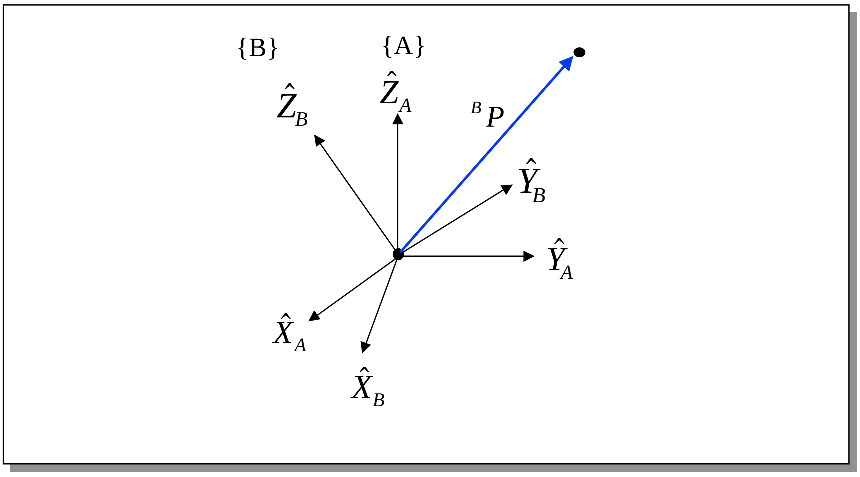
- Colunas da matriz de rotação são vetores unitários e mutuamente ortogonais. Como consequência:

$$^{A}_{B}R = {}^{B}_{A}R^{-1} = {}^{B}_{A}R^{T}$$

e

$$^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} {}^{A}\hat{X}_{B} & {}^{A}\hat{Y}_{B} & {}^{A}\hat{Z}_{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{B}\hat{X}_{A}^{T} \\ {}^{B}\hat{Y}_{A}^{T} \\ {}^{B}\hat{Z}_{A}^{T} \end{bmatrix}$$

Referenciais Rotacionados



Referenciais Rotacionados

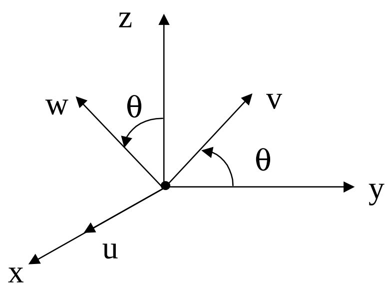
- Projeções dos componentes do vetor ${}^{A}P$ sobre os vetores unitários:

$$
\begin{aligned}
{}^{A}p_x &= {}^{B}\hat{X}_A \cdot {}^{B}P \\
{}^{A}p_y &= {}^{B}\hat{Y}_A \cdot {}^{B}P \\
{}^{A}p_z &= {}^{B}\hat{Z} \cdot {}^{B}P
\end{aligned}
$$

substituindo, temos:

$$
{}^{A}P = {}^{A}_{B}R\,{}^{B}P
$$

Referenciais Rotacionados



$$R_{x,\theta} = \begin{bmatrix} i_x \cdot i_u & i_x \cdot j_v & i_x \cdot k_w \\ j_y \cdot i_u & j_y \cdot j_v & j_y \cdot k_w \\ k_z \cdot i_u & k_z \cdot j_v & k_z \cdot k_w \end{bmatrix}$$

Referenciais Rotacionados

$$R_{x,\theta} = \begin{bmatrix} i_x \cdot i_u & i_x \cdot j_v & i_x \cdot k_w \\ j_y \cdot i_u & j_y \cdot j_v & j_y \cdot k_w \\ k_z \cdot i_u & k_z \cdot j_v & k_z \cdot k_w \end{bmatrix}$$

$$R_{x,\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Referenciais Rotacionados

- Exemplo: Referencial {B} rotacionado em relação a {A} de $\hat{Z}$ de $\theta=30^{o}$:

$$ {}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.500 & 0.000 \\ 0.500 & 0.866 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 \end{bmatrix} \qquad {}^{B}P = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 2.0 \\ 0.0 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{A}P = {}^{A}_{B}R\,{}^{B}P = \begin{bmatrix} -1.000 \\ 1.732 \\ 0.000 \end{bmatrix} $$

Referenciais Genéricos

- Descrever ${}^{B}P$ em relação a um frame intermediário, cuja orientação seja a mesma e {A}, e cuja origem seja coincidente com {A}.
- Realizar a soma vetorial para "descontar" a translação:

$$ {}^{A}P = {}^{A}_{B}R\,{}^{B}P + {}^{A}P_{Borg} $$

- De maneira mais compacta:

$$ {}^{A}P = {}^{A}_{B}T\,{}^{B}P $$

Transformação Homogênea

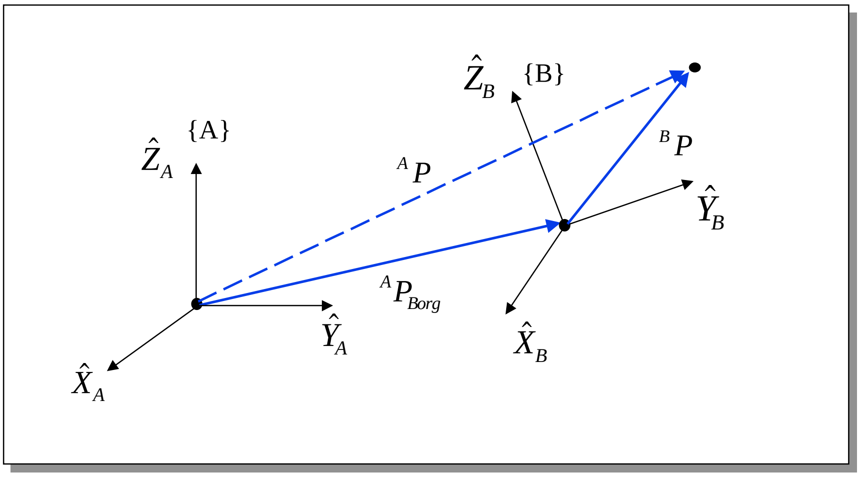
$$\begin{bmatrix} {}^{A}P \\ \hline 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} & {}^{A}_{B}R & & {}^{A}P_{Borg} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} {}^{B}P \\ \hline 1 \end{bmatrix}$$

1. Um “1”é adicionado como último elemento dos vetores 4x1.
2. Uma linha com [0 0 0 1] é adicionada como última linha da matriz 4x4.

A descrição de {B} relativo a {A} é:

$${}^{A}_{B}T$$

Transformação Genérica



Transformação Genérica

- Exemplo: Sendo {B} rotacionado 30 graus em torno de $\hat{Z}$, e transladado de 10 unidades ao longo de $\hat{Y}_A$ e de 5 unidades ao longo de $\hat{X}_A$, encontre ${}^{A}P$, sendo que ${}^{B}P = [3.0\ 7.0\ 0.0]^T$.

  {B} pode ser definido como:

$$ {}^{A}_{B}T = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.500 & 0.000 & 10.0 \\ 0.500 & 0.866 & 0.000 & 5.0 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 & 0.00 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Transformação Genérica

Sendo P, em relação a {B}: $\quad {}^{B}P = \begin{bmatrix} 3.0 \\ 7.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}$

Temos, finalmente, que:

$$ {}^{A}P = {}^{A}_{B}T\,{}^{B}P = \begin{bmatrix} 9.098 \\ 12.562 \\ 0.000 \end{bmatrix} $$

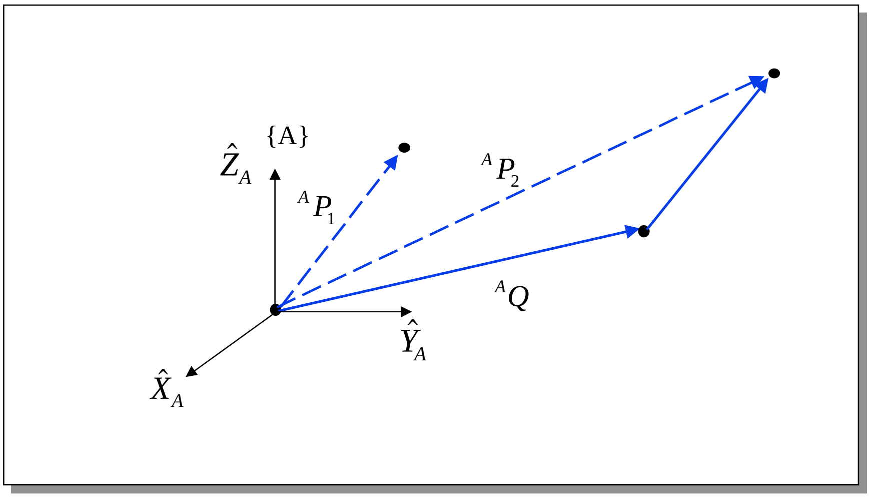
Operadores

- As mesmas formas matemáticas que utilizamos para mapear pontos entre referenciais, também podem ser interpretados como operadores que transladam pontos, rotacionam vetores, ou ambos.

Operador Translacional

- **Operador translacional** – move um ponto no espaço de uma distância finita, ao longo da direção de um dado vetor.
  - Apenas um sistema coordenado;
  - Mesma matemática de mapeamento de pontos entre referenciais;
  - Mover um vetor “para frente” em relação a um determinado referencial pode ser vista como:
    - » O vetor movendo “para frente”, ou
    - » O referencial movendo “para trás”.

Operador Translacional



Operador Translacional

- Da figura tem-se que:

$$^AP_2 = {}^AP_1 + {}^AQ$$

ou, de outra maneira:

$$^AP_2 = D_Q(q)\, {}^AP_1$$

onde:

q — magnitude (com sinal) da translação

$\hat{Q}$ — vetor ao longo do qual ocorre a translação

Operador Translacional

- $D_Q(q)$ — pode ser considerado como uma transformação homogênea do tipo simples:

$$D_Q(q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & q_x \\ 0 & 1 & 0 & q_y \\ 0 & 0 & 1 & q_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde q_x, q_y, q_z são componentes do vetor $\hat{Q}$ e:

$$q = \sqrt{q_x^2 + q_y^2 + q_z^2}$$

Operador Rotacional

- **Operador rotacional** – muda um vetor ${}^{A}P_1$ em um novo vetor ${}^{A}P_2$, através de uma rotação R:

$${}^{A}P_2 = R\,{}^{A}P_1$$

ou:

$${}^{A}P_2 = R_K(\theta)\,{}^{A}P_1$$

onde $R_K(\theta)$ refere-se ao operador rotacional

Operador Rotacional

- Um operador rotacional "$R_Z(\theta)$" que produz uma rotação de θ graus em torno de um eixo direcional $\hat{Z}$, pode ser escrito em coordenadas homogêneas:

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Operador Rotacional

- *A matriz de rotação que rotaciona vetores por meio de alguma rotação R, é equivalente à matriz de rotação que descreve um referencial rotacionado de R relativo a um referencial de referência.*

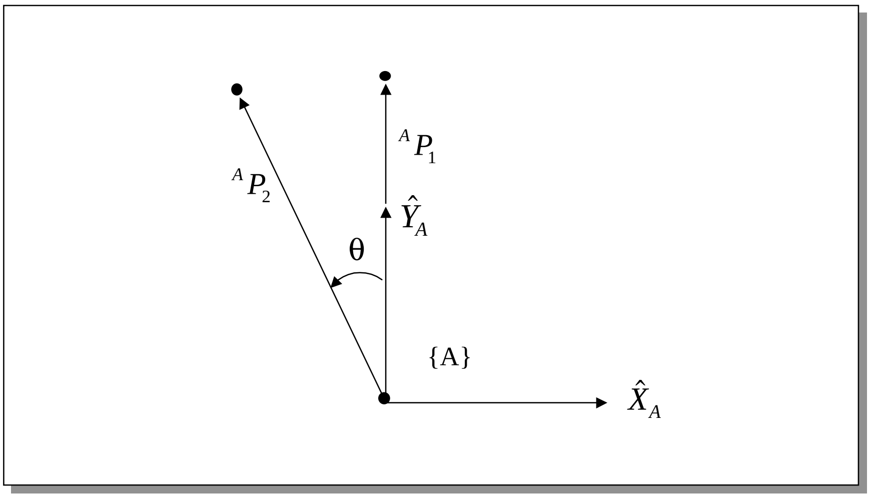
Operador Rotacional

- Exemplo: Calcular o novo vetor $^{A}P_{2}$ obtido através da rotação de 30 graus do vetor $^{A}P_{1}$ em torno de $\hat{Z}$.

$$R_Z(\theta) = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.500 & 0.000 \\ 0.500 & 0.866 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 \end{bmatrix} \qquad {}^{A}P_1 = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 2.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}$$

$$^{A}P_2 = R_Z(\theta)\,{}^{A}P_1 = \begin{bmatrix} -1.000 \\ 1.732 \\ 0.000 \end{bmatrix}$$

Operador Rotacional



Operador de Transformação

- **Operador de transformação** – Como no caso de vetores de posição e matrizes de rotação, um referencial também pode ter uma outra interpretação. O operador T rotaciona e translada o vetor ${}^{A}P_{1}$ para produzir um novo vetor ${}^{A}P_{2}$:

$$ {}^{A}P_{2} = T\ {}^{A}P_{1} $$

Operador de Transformação

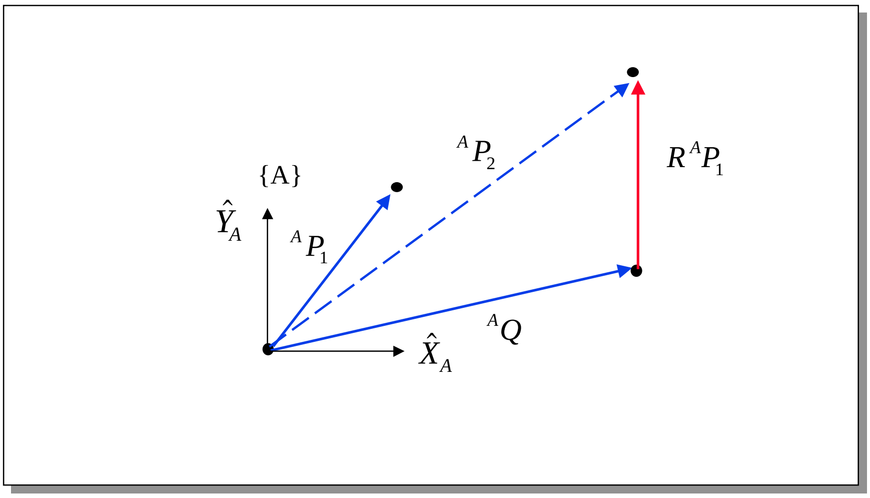
- *Uma transformação que rotaciona de R e translada de Q é equivalente à transformação que descreve um referencial rotacionado de R e transladado de Q em relação ao referencial de referência.*

Operador de Transformação

- Exemplo: Deseja-se rotacionar o vetor ${}^{A}P_1 = [3.0\ 7.0\ 0.0]^T$ de 30 graus em torno do eixo $\hat{Z}_A$, e transladá-lo de 10 unidades em $\hat{X}_A$ e 5 unidades em $\hat{Y}_A$. Determinar ${}^{A}P_2$.

$$T = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.500 & 0.000 & 10.0 \\ 0.500 & 0.866 & 0.000 & 5.0 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 & 0.00 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad {}^{B}P = \begin{bmatrix} 3.0 \\ 7.0 \\ 0.0 \end{bmatrix} \qquad {}^{A}P_2 = T\,{}^{B}P_1 = \begin{bmatrix} 9.098 \\ 12.562 \\ 0.000 \end{bmatrix}$$

Operador de Transformação



Resumo das interpretações

- *Transformações Homogêneas*:
  1. Descrição de um referencial. ${}^{A}_{B}T$ descreve o referencial *{B}* relativo ao referencial *{A}*. Mais especificamente, as colunas de são vetores unitários que definem as direções dos eixos principais de *{B}*, e ${}^{A}P_{Borg}$ localiza a posição da origem de *{B}*.

Resumo das Interpretações

2. *Transformação de mapeamento.* ${}^{A}_{B}T$ mapeia ${}^{B}P \mapsto {}^{A}P$.
3. *Operador de transformação. T* opera em ${}^{A}P_1$ para produzir ${}^{A}P_2$.

Referencial – usado para descrições

Transformação – usado mapeamentos ou operadores

Transformações Compostas

– Na figura a seguir, o referencial $\{C\}$ é conhecido em relação ao referencial $\{B\}$, e o referencial $\{B\}$ é conhecido em relação ao referencial $\{A\}$. Pode-se transformar ${}^{C}P$ em ${}^{B}P$:

$$ {}^{B}P = {}^{B}_{C}T \, {}^{C}P $$

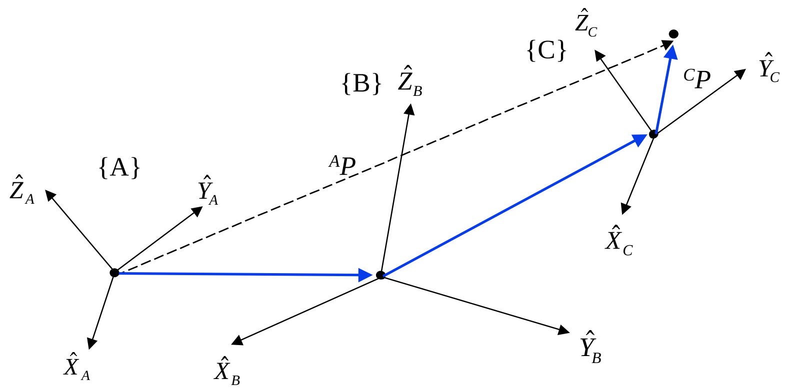
– e transformar ${}^{B}P$ em ${}^{A}P$:

$$ {}^{A}P = {}^{A}_{B}T \, {}^{B}P $$

– definindo:

$$ {}^{A}_{C}T = {}^{A}_{B}T \, {}^{B}_{C}T $$

Transformações Compostas



Transformações Compostas

Em termos das descrições de *{B}* e *{C}*, temos:

$$ {}^{A}_{C}T = \left[\begin{array}{ccc|c} & {}^{A}_{B}R\,{}^{B}_{C}R & & {}^{A}_{B}R\,{}^{B}P_{Corg} + {}^{A}P_{Borg} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] $$

Invertendo uma Transformação

- Inverter a matriz 4x4 – mais caro
- Fazer uso da estrutura da transformada:
  - ${}^{B}_{A}T$ pode ser encontrado a partir de ${}^{B}_{A}R$ e de ${}^{B}P_{Aorg}$

$$ {}^{B}({}^{A}P_{Borg}) = {}^{B}_{A}R\,{}^{A}P_{Borg} + {}^{B}P_{Aorg} $$

$$ {}^{B}P_{Aorg} = -{}^{B}_{A}R\,{}^{A}P_{Borg} = -{}^{A}_{B}R^{T}\,{}^{A}P_{Borg} $$

Invertendo uma Transformação

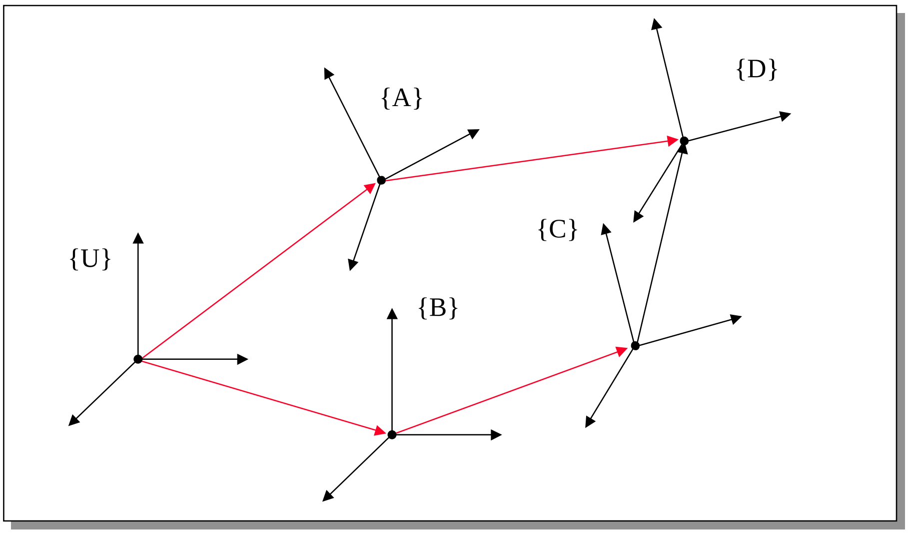
Logo, pode-se escrever:

$$
{}^{B}_{A}T = \left[\begin{array}{ccc|c} & {}^{A}_{B}R^{T} & & -{}^{A}_{B}R^{T}\,{}^{A}P_{Borg} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]
$$

E, como consequência:

$$
{}^{B}_{A}T = {}^{A}_{B}T^{-1}
$$

Equações de transformações



Equação de Transformações

Da figura anterior temos que:

$$ {}^{U}_{D}T = {}^{U}_{A}T \, {}^{A}_{D}T $$

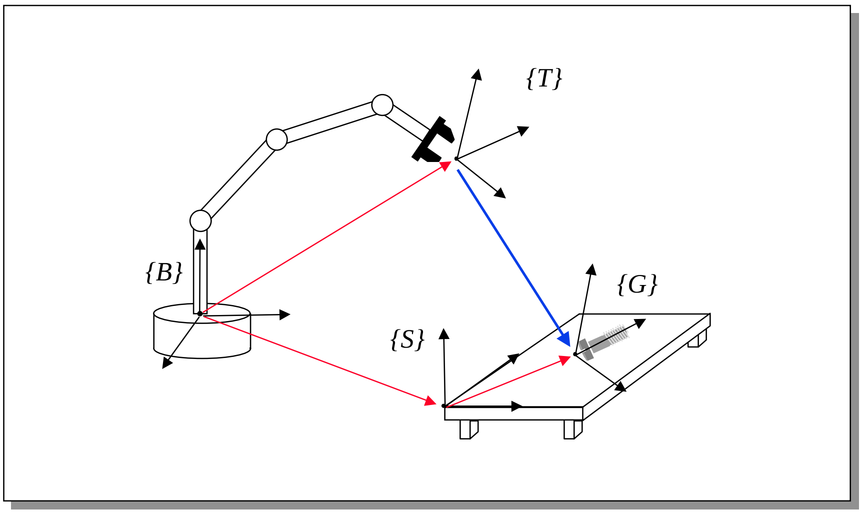
ou, também:

$$ {}^{U}_{D}T = {}^{U}_{B}T \, {}^{B}_{C}T \, {}^{C}_{D}T $$

igualando-se as duas expressões acima, tem-se:

$$ {}^{U}_{A}T \, {}^{A}_{D}T = {}^{U}_{B}T \, {}^{B}_{C}T \, {}^{C}_{D}T $$

Equação de Transformações



Representações de Orientação

- Matrizes de rotação:
  - Todas as colunas são mutuamente ortogonais;
  - Colunas possuem magnitude = 1;
  - Matrizes ortonormais próprias (*det = +1*);

  É possível representar rotações em 3D com menos do que 9 parâmetros?

Representações de Orientação

- Formula de Cayley para matrizes ortonormais:

  Para qualquer matriz ortonormal própria R, existe uma matriz S, uma matriz skew-symmetric, tal que:

$$R = (I_3 - S)^{-1} (I_3 + S)$$

Representações de Orientação

- Uma matriz *skew-symmetric* $(S = - S^T)$ de dimensão 3 é especificada por 3 parâmetros (s_x, s_y, s_z):

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -s_z & s_y \\ s_z & 0 & -s_x \\ -s_y & s_x & 0 \end{bmatrix}$$

Como consequência, qualquer matriz de rotação $3x3$ pode ser especificada apenas por 3 parâmetros.

Representações de Orientação

- Mais fácil visualizar translações.
- Mais difícil especificar e visualizar rotações.
- Rotações não são comutativas:

$${}^A_B R \, {}^B_C R \neq {}^B_C R \, {}^A_B R$$

Representações de Orientação

Exemplo:

$$R_Z(30) = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.500 & 0.000 \\ 0.500 & 0.866 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 \end{bmatrix} \qquad R_X(30) = \begin{bmatrix} 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.866 & -0.500 \\ 0.000 & 0.500 & 0.866 \end{bmatrix}$$

$$R_Z(30)R_X(30) = \begin{bmatrix} 0.87 & -0.43 & 0.000 \\ 0.50 & 0.75 & -0.43 \\ 0.00 & 0.000 & 0.87 \end{bmatrix} \neq R_X(30)R_Z(30) = \begin{bmatrix} 0.87 & -0.50 & 0.00 \\ 0.43 & 0.75 & -0.50 \\ 0.25 & 0.43 & 0.87 \end{bmatrix}$$

Representações de Orientações

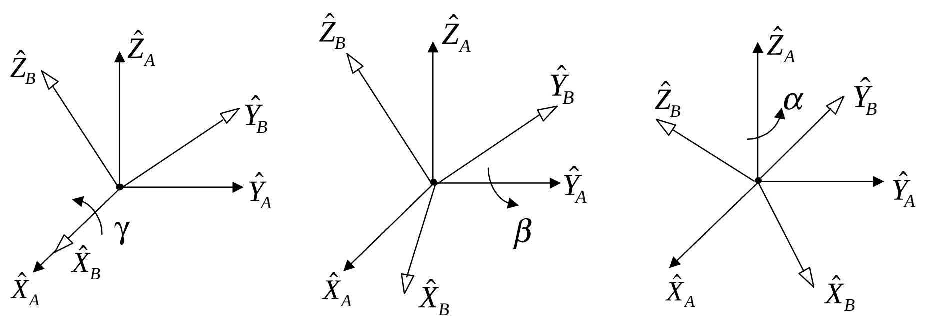
- Convenções de conjuntos de ângulos: 24
  - Sequências de 3 rotações
  - 12 ângulos fixos
  - 12 ângulos de Euler
  - Dualidade reduz o número de parametrizações únicas para rotação para apenas 12.

Ângulos Fixos X-Y-Z

- **Ângulos Fixos X-Y-Z**

  Iniciar com o referencial {B} coincidente com um referencial conhecido {A}. Primeiramente, rotacione {B} em torno de X_A de um ângulo γ, rotacione, então, em torno de Y_A de um ângulo β, e finalmente rotacione em torno de Z_A de um ângulo α.
- Também conhecido como *roll, pitch e yaw.*

Ângulos Fixos X-Y-Z



Ângulos Fixos X-Y-Z

$$
{}^{A}_{B}R_{XYZ}(\gamma,\beta,\alpha) = R_Z(\alpha)R_Y(\beta)R_X(\gamma)
$$

$$
= \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\gamma & -s\gamma \\ 0 & s\gamma & c\gamma \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma \\ s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma \\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\gamma \end{bmatrix}
$$

Ângulos Fixos X-Y-Z

- Problema inverso: 9 equações e 3 incógnitas.

$$
\begin{bmatrix} c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma \\ s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma \\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\gamma \end{bmatrix} == \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}
$$

Ângulos Fixos X-Y-Z

$$c\beta = \sqrt{r_{21}{}^2 + r_{21}{}^2}$$

$$\beta = \text{Atan2}\left(-r_{31,} \sqrt{r_{21}{}^2 + r_{21}{}^2}\right)$$

$$\alpha = \text{Atan2}\left(\frac{r_{21}}{c\beta}, \frac{r_{11}}{c\beta}\right); \qquad (\text{se } c\beta \neq 0)$$

$$\gamma = \text{Atan2}\left(\frac{r_{32}}{c\beta}, \frac{r33}{c\beta}\right); \qquad (\text{se } c\beta \neq 0)$$

Ângulos Fixos X-Y-Z

- *Atan2 (y,x)* calcula *tan^{-1} (y/x)*, mas utiliza o sinal de *x* e *y* para determinar o quadrante que contém o ângulo resultante.

  Exemplo:

  Atan2(-2.0, -2.0) = -135^o

  Atan2(2.0,2.0) = 45^o

Ângulos Fixos X-Y-Z

- Múltiplas soluções podem existir, nesse caso calcula-se o resultado de forma que $-90.0 \leq \beta \leq +90.0$
- Se $\beta = \pm 90.0°$, a solução anterior degenera. Nesses casos, a diferença entre α e γ pode ser calculada. Assume-se que $\alpha = 0.0°$.
  Se $\beta = 90.0°$ tem-se que:

  $$\beta = 90.0° \; ; \; \alpha = 0.0° \; ; \; \gamma = \mathrm{Atan2}(r_{12}, r_{22})$$

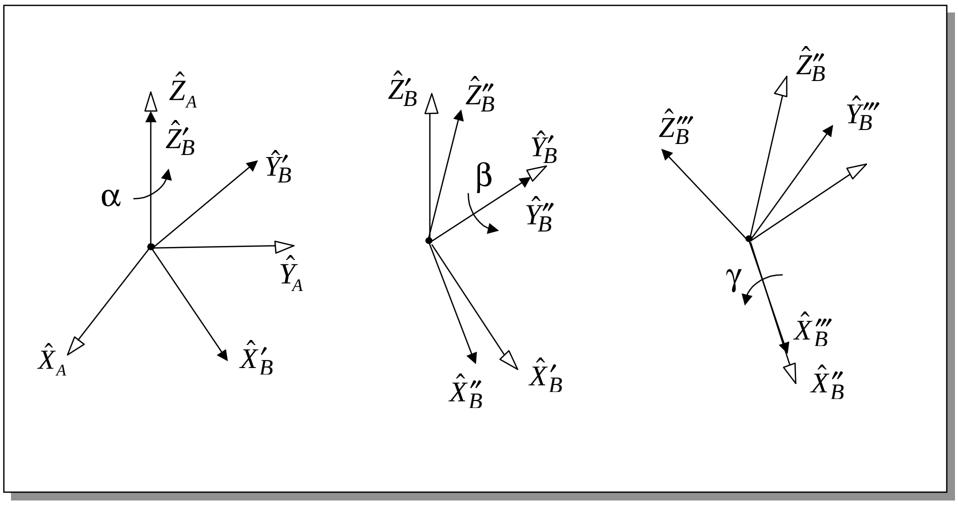
  Se $\beta = -90.0°$

  $$\beta = -90.0° \; ; \; \alpha = 0.0° \; ; \; \gamma = -\mathrm{Atan2}(r_{12}, r_{22})$$

Ângulos de Euler Z-Y-X

- **Ângulos de Euler Z-Y-X**
  Iniciar com o referencial {B} coincidente com um referencial conhecido {A}. Primeiramente, rotacione {B} em torno de Z_B *de um ângulo* α*, rotacione, então, em torno de* Y_B *de um ângulo* β*, e finalmente rotacione em torno de* X_B *de um ângulo* γ*.*
- Rotações realizadas em torno dos eixos do referencial móvel.

Ângulos de Euler Z-Y-X



Ângulos de Euler Z-Y-X

$$
{}^{A}_{B}R_{Z'Y'X'}(\alpha,\beta,\gamma) = {}^{A}_{B'}R\,{}^{B'}_{B''}R\,{}^{B''}_{B}R = R_Z(\alpha)R_Y(\beta)R_X(\gamma)
$$

$$
= \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\gamma & -s\gamma \\ 0 & s\gamma & c\gamma \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma \\ s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma \\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\gamma \end{bmatrix}
$$

Ângulos de Euler Z-Y-X

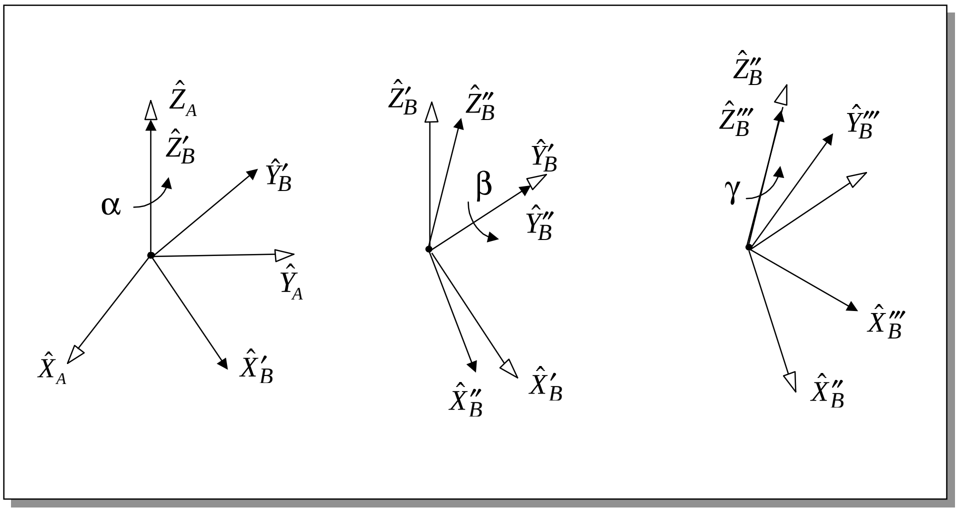
- Três rotações em torno de ângulos fixos produzem a mesma orientação das mesmas três rotações realizadas em ordem oposta em torno dos eixos dos referenciais móveis.

Ângulos de Euler Z-Y-Z

- **Ângulos de Euler Z-Y-Z**

  Iniciar com o referencial {B} coincidente com um referencial conhecido {A}. Primeiramente, rotacione {B} em torno de Z_B de um ângulo α, rotacione, então, em torno de Y_B de um ângulo β, e finalmente rotacione em torno de Z_B de um ângulo γ.
- Rotações realizadas em torno dos eixos do referencial móvel.

Ângulos de Euler Z-Y-Z



Ângulos de Euler Z-Y-Z

$$ {}^{A}_{B}R_{Z'Y'Z'}(\alpha,\beta,\gamma) = R_Z(\alpha)R_Y(\beta)R_Z(\gamma)$$

$$= \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\gamma & -s\gamma & 0 \\ s\gamma & c\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c\alpha c\beta c\gamma - s\alpha s\gamma & -c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta \\ s\alpha c\beta c\gamma + c\alpha s\gamma & -s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta \\ -s\beta c\gamma & s\beta s\gamma & c\beta \end{bmatrix}$$

Ângulos de Euler Z-Y-Z

$${}^{A}_{B}R_{Z'Y'Z'}(\alpha,\beta,\gamma) =$$

$$= \begin{bmatrix} c\alpha c\beta c\gamma - s\alpha s\gamma & -c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta \\ s\alpha c\beta c\gamma + c\alpha s\gamma & -s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta \\ -s\beta c\gamma & s\beta s\gamma & c\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

Se $s\beta \neq 0$

$$\beta = \text{Atan2}\left(\sqrt{r_{31}^2 + r_{32}^2}, r_{33}\right)$$

$$\alpha = \text{Atan2}\left(r_{23}/s\beta, r_{13}/s\beta\right)$$

$$\gamma = \text{Atan2}\left(r_{32}/s\beta, -r_{31}/s\beta\right)$$

Ângulos de Euler Z-Y-Z

- Múltiplas soluções podem existir, nesse caso calcula-se o resultado de forma que $0.0 \leq \beta \leq 180.0$
- Se $\beta = 0.0°$ ou $\beta = 180.0°$, a solução anterior degenera. Nesses casos, a diferença entre α e γ pode ser calculada. Assume-se que $\alpha = 0.0$.
  Se $\beta = 0.0°$ tem-se que:

  $$\beta = 0.0° ; \alpha = 0.0° ; \gamma = \text{Atan2}(-r_{12}, r_{11})$$

  Se $\beta = 180.0°$ tem-se que:

  $$\beta = 180.0° ; \alpha = 0.0° ; \gamma = \text{Atan2}(r_{12}, -r_{11})$$

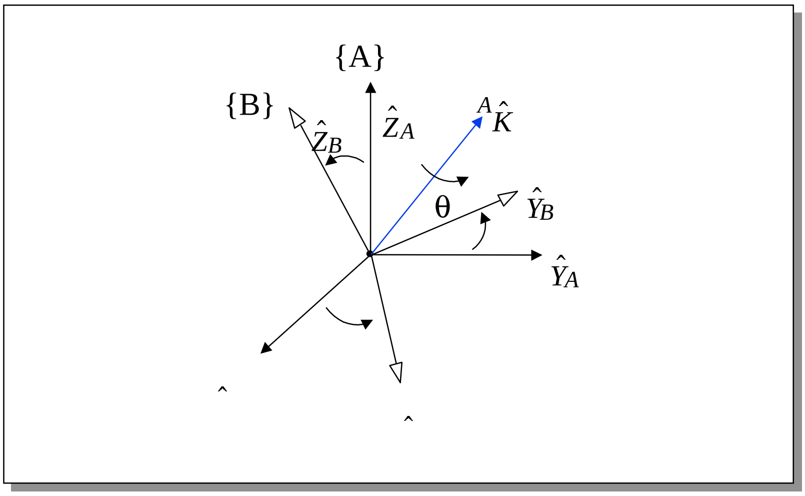
Ângulo-eixo Equivalentes

- **Ângulo-eixo equivalente**

  Iniciar com o referencial {B} coincidente com um referencial conhecido {A}. Rotacione {B} em torno de um vetor ${}^{A}\hat{K}$ de um ângulo α, seguindo a regra da mão direita.

- Qualquer orientação pode ser descrita por meio de uma rotação em torno de um eixo genérico.

Ângulo-eixo Equivalentes



Ângulo-eixo Equivalentes

$$R_Z(\theta) = \begin{bmatrix} k_x k_x v\theta + c\theta & k_x k_y v\theta - k_z s\theta & k_x k_z v\theta + k_y s\theta \\ k_x k_y v\theta + k_z s\theta & k_y k_y v\theta + c\theta & k_y k_z v\theta - k_x s\theta \\ k_x k_z v\theta - k_y s\theta & k_y k_z v\theta + k_x s\theta & k_z k_z v\theta + c\theta \end{bmatrix}$$

onde $v\theta = 1 - \cos\theta$ e ${}^{A}\hat{K} = \begin{bmatrix} k_x & k_y & k_z \end{bmatrix}^T$

Ângulo-eixo Equivalentes

$${}_{B}R_K(\theta) = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

$$\theta = \mathrm{Acos}\left(\frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2}\right); \quad \hat{K} = \frac{1}{2\,\mathrm{sen}\,\theta}\begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix}$$

Ângulo-eixo Equivalentes

- Problemas:
  - A solução anterior calcula o valor de θ entre 0 e 180 graus.
  - Existe um outro par, $\left(-{}^{A}\hat{K}, -\theta\right)$ que resulta na mesma orientação no espaço.
  - Pequenas rotações angulares resultarão em um eixo "mal-definido". No limite, quando a rotação tende para zero, o eixo de rotação se torna indefinido. A solução anterior falha para $\theta = 0^o$ ou $\theta = 180^o$.

Ângulo-eixo Equivalentes

- Exemplo: Referencial {B} inicialmente coincidente com {A}. Rotacione {B} em torno do vetor ${}^{A}\hat{K} = [0.707 \quad 0.707 \quad 0.0]^T$ (passando pela origem), de um ângulo $\theta = 30^o$. Qual a descrição do referencial {B}?

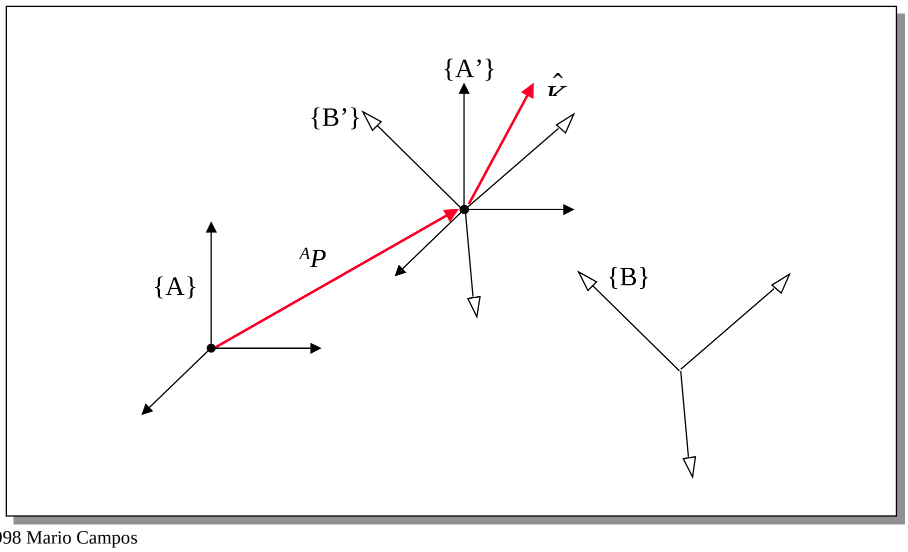
$$
{}^{A}_{B}T = \begin{bmatrix} 0.933 & 0.067 & 0.354 & 0.0 \\ 0.067 & 0.933 & -0.354 & 0.0 \\ -0.354 & 0.354 & 0.866 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}
$$

Ângulo-eixo Equivalentes

- Exemplo: Referencial {B} inicialmente coincidente com {A}. Rotacione {B} de um ângulo θ = 30º em torno do vetor ${}^{A}\hat{K} = [0.707 \quad 0.707 \quad 0.0]^T$, passando pelo ponto ${}^{A}P = [1.0 \quad 2.0 \quad 3.0]^T$. Qual a descrição do referencial {B}?

Definem-se, dois referenciais intermediários {A'} e {B'}, com a mesma orientação de {A} e {B}, mas transladados em relação a {A} de um "off-set" que coloca as duas origens no eixo de rotação.

Ângulo-eixo Equivalentes



Ângulo-eixo Equivalentes

Temos, a seguir, {A′} relativo a {A} e {B} relativo a {B′}:

$$
{}^{A}_{A'}T = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & 2.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 3.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \qquad {}^{B'}_{B}T = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & -1.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & -2.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & -3.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}
$$

Ângulo-eixo Equivalentes

– Pode-se, agora, rotacionar {B’} relativo a {A’}, em torno de um eixo que passa pela origem, sabendo-se que não houve translação:

$$
{}^{A'}_{B'}T = \begin{bmatrix} 0.933 & 0.067 & 0.354 & 0.0 \\ 0.067 & 0.933 & -0.354 & 0.0 \\ -0.354 & 0.354 & 0.866 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}
$$

Ângulo-eixo Equivalentes

Finalmente, pode-se escrever a equação que calcula a transformação que descreve o referencial {B} em relação ao referencial {A}:

$$ {}^{A}_{B}T = {}^{A}_{A'}T \; {}^{A'}_{B'}T \; {}^{B'}_{B}T $$

$$ {}^{A}_{B}T = \begin{bmatrix} 0.933 & 0.067 & 0.354 & -1.13 \\ 0.067 & 0.933 & -0.354 & 1.13 \\ -0.354 & 0.354 & 0.866 & 0.05 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 1.00 \end{bmatrix} $$

Parâmetros de Euler

- Uma outra representação de orientação. Em termos do eixo equivalente $\hat{K} = [k_x \quad k_y \quad k_z]^T$ e do ângulo equivalente θ, os parâmetros de Euler são dados por:

$$ \varepsilon_1 = k_x \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} $$

$$ \varepsilon_2 = k_y \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} $$

$$ \varepsilon_3 = k_z \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} $$

$$ \varepsilon_4 = \cos\frac{\theta}{2} $$

Parâmetros de Euler

- As quatro quantidades não são independentes, mas pode-se escrever que:

$$\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2 = 1$$

  que pode ser visualizado como uma hiper-esfera unitária no espaço quadri-dimensional.
- Visto como um vetor *4x1*, os parâmetros de Euler são conhecidos como **quatérnios unitários**

Parâmetros de Euler

- A matriz de rotação *Rε*, equivalente ao conjunto de ângulos de Euler é dada por:

$$R_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 - 2\varepsilon_2^2 - 2\varepsilon_3^2 & 2(\varepsilon_1\varepsilon_2 - \varepsilon_3\varepsilon_4) & 2(\varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_4) \\ 2(\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_3\varepsilon_4) & 1 - 2\varepsilon_1^2 - 2\varepsilon_3^2 & 2(\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_4) \\ 2(\varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_4) & 2(\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_4) & 1 - 2\varepsilon_2^2 - 2\varepsilon_2^2 \end{bmatrix}$$

Parâmetros de Euler

- Dada uma matriz de rotação, os parâmetros de Euler equivalentes são dados por:

$$\varepsilon_1 = \frac{r_{32} - r_{23}}{4\varepsilon_4} \;;\; \varepsilon_2 = \frac{r_{13} - r_{31}}{4\varepsilon_4}$$

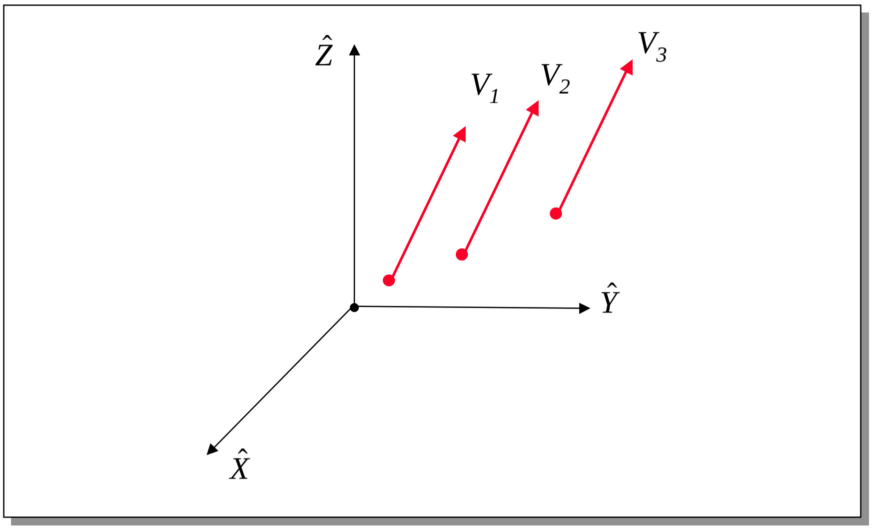
$$\varepsilon_3 = \frac{r_{21} - r_{12}}{4\varepsilon_4} \;;\; \varepsilon_4 = \frac{1}{2}\sqrt{1 + r_{11} + r_{22} + r_{33}}$$

- Não é muito útil, computacionalmente falando, se representar rotações de 180º ($\varepsilon_4 = 0$).
- Todos os ε_i permanecem no intervalo [-1,1].

Transformação de Vetores Livres

- Vetores como velocidade e força serão transformados de maneira diferente.
- Dois vetores são *iguais*, se tiverem a mesma *dimensão, magnitude e direção*. Podem, no entanto, possuir diferentes *linhas de ação*, como mostrado na figura a seguir.
- Dois vetores são *equivalentes* segundo certa capacidade, quando produzem o *mesmo efeito* nessa capacidade.

Transformação de Vetores Livres



Transformação de Vetores Livres

- Um ***vetor de linha*** refere-se a um vetor que, juntamente com a magnitude e direção, é dependente de sua ***linha de ação***, no tocante a definição de seu efeito.
- Um ***vetor livre*** refere-se a um vetor que pode ser posicionado em qualquer lugar do espaço sem perda ou mudança em seu significado, enquanto sua magnitude e direção forem preservadas.

Transformação de Vetores Livres

- Um vetor de momento é sempre um vetor livre. Se tivermos um vetor de momento ${}^{B}N$, pode-se calcular esse mesmo vetor em termos do referencial {A}:

$$ {}^{A}N = {}^{A}_{B}R\,{}^{B}N $$

ou seja, apenas a matriz de rotação é necessária para mapeá-lo.

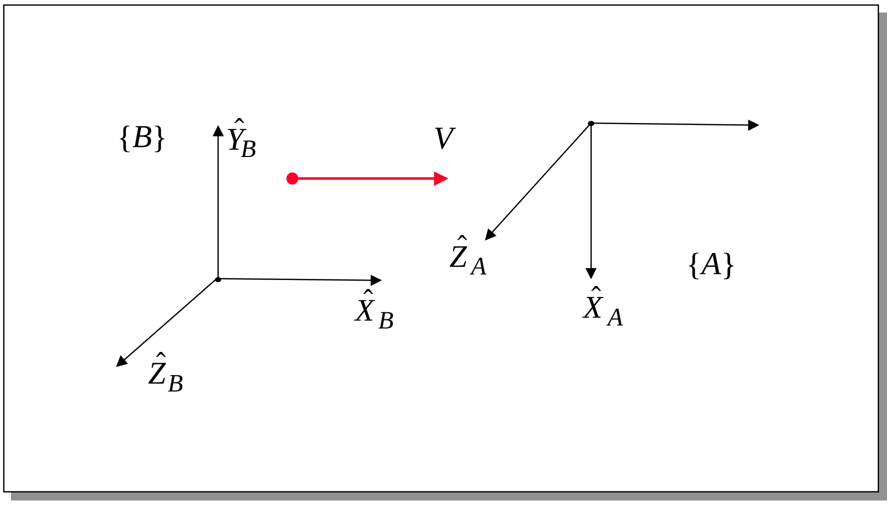
Transformação de Vetores Livres

- Da mesma maneira, o vetor velocidade descrito em relação a *{B}*, ${}^{B}V$, pode ser descrito em relação a *{A}* como:

$A_{-\ -}\quad A_{-}\ B_{-\ -}$

- A velocidade de um ponto é um vetor livre. Na figura a seguir, se B ^, então A ^.

Transformação de Vetores Livres



Considerações Computacionais

- A ***ordem*** em que as transformações são aplicadas faz grande diferença em termos da computação necessária. Por exemplo, existem duas possibilidades básicas de se perfazer múltiplas rotações no vetor de posição ${}^{A}P$:

$${}^{A}P = {}^{A}_{B}R\,{}^{B}_{C}R\,{}^{C}_{D}R\,{}^{D}P$$

Considerações Computacionais

- Multiplicar as três matrizes de rotação, e depois multiplicar pelo vetor:

$$ {}^{A}_{D}R = {}^{A}_{B}R\,{}^{B}_{C}R\,{}^{C}_{D}R $$

$$ {}^{A}P = {}^{A}_{D}R\,{}^{D}P $$

- Calcular ${}^{A}_{D}R$ requer 54 multiplicações e 36 adições, e a multiplicação final pelo vetor requer mais 9 multiplicações e 6 adições, perfazendo um total de 63 multiplicações e 42 adições.

Considerações Computacionais

- Se multiplicarmos o vetor pelas matrizes, uma a uma:

$$ {}^{A}P = {}^{A}_{B}R\,{}^{B}_{C}R\,{}^{C}_{D}R\,{}^{D}P $$

$$ {}^{A}P = {}^{A}_{B}R\,{}^{B}_{C}R\,{}^{C}P $$

$$ {}^{A}P = {}^{A}_{B}R\,{}^{B}P $$

$$ {}^{A}P = {}^{A}P $$

teremos um total de 27 multiplicações e 18 adições, menos da metade, se comparado com o método anterior.

Considerações Computacionais

- Em alguns casos podem existir inúmeros ${}^{D}P_i$ que serão transformados em ${}^{A}P_i$. Neste caso será mais eficiente calcular-se ${}^{A}_{D}R$ apenas uma vez e utilizá-lo nos mapeamentos posteriores.

Considerações Computacionais

- Um método mais eficiente de se calcular o produto de duas matrizes de rotação , com menos de 27 multiplicações e 18 adições. Onde são as colunas de , e B são as colunas da matriz $\hat{C}_i$ resultado.

$$\hat{C}_1 = {}^{A}_{B}R\hat{L}_1 \,,$$

$$\hat{C}_2 = {}^{A}_{B}R\hat{L}_2 \,,$$

$$\hat{C}_3 = \hat{C}_1 \times \hat{C}_2$$

requerendo 24 multiplicações e 15 adições.