Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Tecnologia
Dept^{o} de Engenharia de Computação e Automação

Modelagem e Análise de Sistemas Dinâmicos

Material didático

Adelardo A. D. de Medeiros

Natal, março de 2003.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Capítulo 1

Introdução aos Sistemas de Controle

1.1 Definições básicas

O controle automático tem desempenhado um papel vital no avanço da engenharia e da ciência. Além de sua extrema importância em veículos espaciais, pilotos automáticos de aviões e mísseis, robôs e outros sistemas complexos, o controle automático tornou-se uma parte importante dos modernos processos industrias e de manufatura, principalmente nas operações industriais de controle de pressão, temperatura, humidade, viscosidade e fluxo.

A engenharia de controle é baseada nos fundamentos da teoria da realimentação e na análise de sistemas lineares. Esta base teórica faz que com a engenharia de controle não seja limitada a nenhuma disciplina específica da engenharia. Por exemplo, muitas vezes um sistema de controle inclui componentes elétricos, mecânicos e químicos. Além disso, à medida em que nossa compreensão dos sistemas políticos, sociais e financeiros aumenta, a possibilidade de controlar tais sistemas também aumenta.

Um *sistema de controle* é uma interconexão de componentes formando uma configuração tal que gere a resposta desejada para o sistema. A base para análise de um sistema são os fundamentos fornecidos pela teoria de sistemas lineares, que assume uma relação causa–efeito para os componenentes do sistema. Logo, o componente a ser controlado, conhecido como *planta* ou *processo*, pode ser representado pelo bloco da figura 1.1. A saída da sistema normalmente é a *variável controlada*, ou seja, a quantidade ou condição que é medida e controlada. A *variável manipulada* (normalmente a entrada do sistema) é a quantidade ou condição que é variada de modo a afetar o valor da variável controlada da maneira desejada.

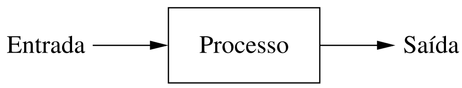


Figura 1.1: Bloco representativo de um componente a ser controlado

Um sistema de controle *em malha aberta* geralmente utiliza apenas um *atuador* para obter a resposta desejada, como mostrado na figura 1.2. O atuador é responsável pela conversão e compatibilização de grandezas físicas e pela elevação do nível de potência necessários para excitar diretamente a planta.

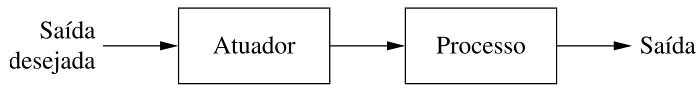


Figura 1.2: Diagrama esquemático de um sistema de controle em malha aberta

Em contraste com um sistema de controle em malha aberta, um sistema de controle *em malha fechada* utiliza uma medida da saída efetiva para compará-la com a saída desejada. A medida do sinal de saída, obtida por um *sensor*, é chamada *sinal de realimentação*. Um sistema de controle realimentado em malha fechada simples é mostrado na figura 1.3. Um sistema de controle realimentado tende a manter a relação desejada de uma variável do sistema com outra por comparação dessas variáveis e utilização da diferença como mecanismo de controle. A diferença entre o sinal de saída e o valor desejado para o sinal de saída é o *sinal de erro*, ou simplesmente *erro*.

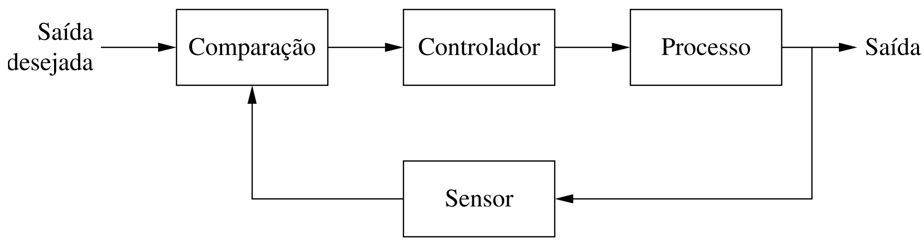


Figura 1.3: Diagrama esquemático de um sistema de controle em malha fechada

A necessidade dos sistemas de controle de malha fechada aparece principalmente nos sistemas sujeitos a *perturbações*. Pertubações são sinais que tendem a afetar de maneira adversa o valor da saída do sistema, normalmente de maneira não previsível e fora do controle do sistema. Um exemplo clássico de perturbação são os sinais de ruído.

Devido à crescente complexidade dos sistemas controlados e ao interesse em obter-se um desempenho ótimo, a importância da engenharia de controle cresceu bastante a partir dos anos 80. Além disso, à medida em que os sistemas se tornam mais complexos, a interrelação de muitas variáveis controladas deve ser considerada em um esquema de controle. Um diagrama de blocos representando um *sistema de controle multivariável* é mostrado na figura 1.4.

Um exemplo comum de um sistema de controle em malha aberta é uma torradeira elétrica em uma cozinha. Um exemplo de sistema em malha fechada é uma pessoa dirigindo um automóvel: os olhos “medem” a posição do carro na rua e o motorista atua para fazer as eventuais correções necessárias.

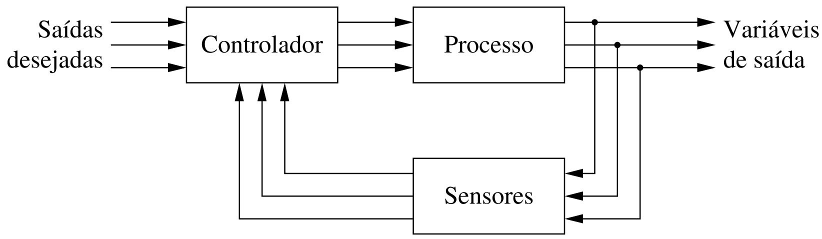


Figura 1.4: Diagrama esquemático de um sistema de controle multivariável

A introdução da realimentação permite controlar a saída desejada e pode melhorar a precisão, mas requer atenção quanto aos aspectos de estabilidade da resposta: é bem conhecido o fato que o "controlador" humano, quando dirigindo o carro, é propenso a acidentes em determinadas situações.

Os sistemas de controle são, às vezes, divididos em duas classes. Se o objetivo do sistema de controle é manter uma variável física em algum valor constante na presença de distúrbios ou perturbações, chamamos a este sistema de *regulador*. Um exemplo de sistema de controle regulador é o sistema biológico do corpo humano, que mantém a sua temperatura em aproximadamente $36,5^o$C, mais ou menos independentemente do metabolismo do corpo ou da temperatura ambiente.

A segunda classe dos sistemas de controle é a dos *servomecanismos*. Embora este termo tenha sido originalmente empregado para um sistema que controlava um movimento ou posição mecânica, atualmente é usado com freqüência para descrever um sistema de controle no qual uma variável física deve seguir ou acompanhar alguma outra variável física ou uma função do tempo desejada. Um exemplo é um sistema de posicionamento de antena de satélite, onde sua posição deve ser permanentemente ajustada para apontar diretamente para o satélite.

1.2 História do controle automático

Um dos primeiros dispositivos realimentados foi o relógio d'água do século II a.C. O tempo era medido com base na água que, através de um orifício, escoava de um reservatório a uma taxa constante. Esta água enchia um segundo reservatório: medindo-se a altura da coluna d'água, conseguia-se saber o tempo decorrido. Para manter a taxa de escoamento constante, o nível de água no primeiro reservatório deveria manter-se inalterado ao longo do tempo, o que tornou necessário algum mecanismo de controle automático.

A figura 1.5 apresenta uma versão do relógio d'água. Uma válvula flutuante na parte superior do vaso intermediário age como sensor e atuador do sistema de controle. A válvula fecha quando o nível atinge um valor desejado. Se o nível estiver abaixo do valor predeterminado, a válvula se abre, elevando o nível do tanque. A água que cai é medida por acumulação em um vaso que possui uma escala. O nível da água dá uma indicação precisa do tempo transcorrido desde a última vez que o vaso foi esvaziado: na verdade, a acumulação de água no vaso inferior é uma forma de integracão (somatório).

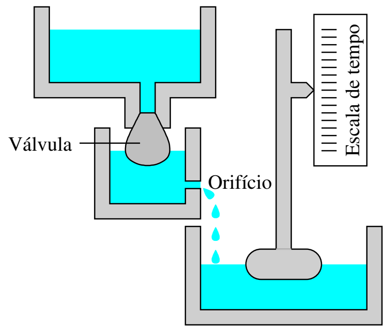


Figura 1.5: Relógio d'água simplificado

O primeiro controlador automático realimentado para um processo industrial foi provavelmente o *governador centrífugo*, desenvolvido por James Watt em 1769 para controlar a velocidade de uma máquina a vapor. O dispositivo mecânico do governador centrífugo, esquematizado na figura 1.6, funciona em razão da atuação da força centrífuga em duas esferas. Um aumento na velocidade da máquina a vapor move as esferas para fora, o que, em conseqüência, move o mecanismo para cima. Este movimento opera uma válvula na linha de vapor para redução do fluxo, que então diminui a velocidade da máquina. Na situação contrária, o decréscimo da velocidade do motor aumenta o fluxo de vapor, que, por sua vez, aumenta a velocidade da máquina.

Máquina

Na história do controle automático, o período até 1868 foi caracterizado pelo desenvolvimento de sistemas de controle automático através da intuição e da invenção, como o dispositivo de Watt. Esforços para melhorar a precisão destes sistemas levavam a atenuações mais lentas das oscilações transitórias ou mesmo à instabilidade do sistema. Tornou-se então imperativo desenvolver-se uma teoria do controle automático, que se fundamentou essencialmente em técnicas matemáticas.

Os colaboradores da teoria matemática usada na modelagem, análise e projeto dos sistemas de controle são inúmeros. Ferramentas ainda bastante usadas atualmente foram desenvolvidas no período que antecede a Segunda Guerra Mundial:

- Isaac Newton (1642-1727) lançou os fundamentos da modelagem matemática e da análise;
- Pierre Simon Laplace (1749-1827) idealizou a transformada de Laplace, a base da maioria dos procedimentos de análise e projeto dos sistemas;
- Brook Taylor contribuiu para a análise matemática (série de Taylor);
- James Clerk Maxwell (1831-1879), para a modelagem matemática e análise (foi ele, em 1868, que formulou o modelo matemático para o governador centrífugo);
- Edward John Routh (1831-1907), com o critério de Routh para determinação de estabilidade de sistemas;
- Charles P. Steinmetz (1865-1923), para a análise da resposta em freqüência usando números complexos;

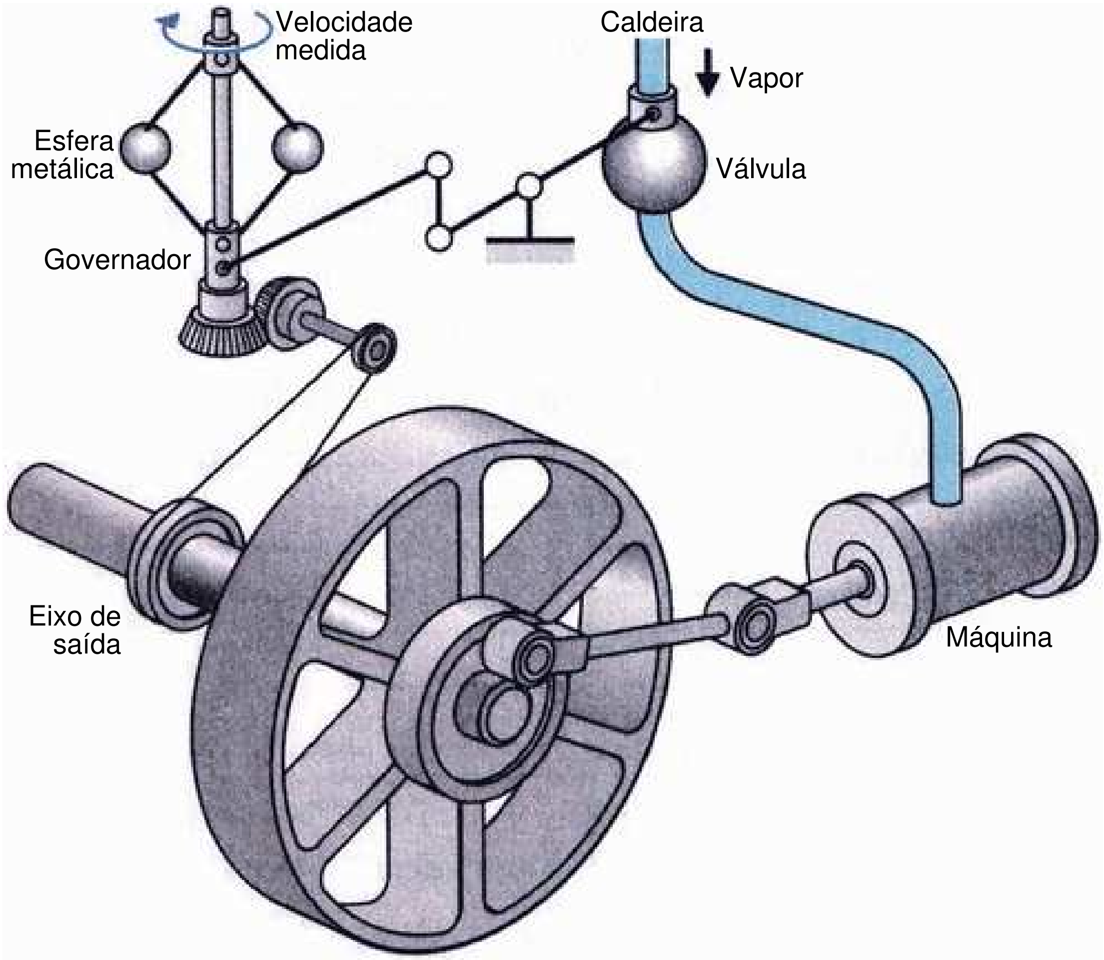


Figura 1.6: Governador centrífugo de James Watt

- Hendrik W. Bode (1905-1982), com o diagrama de Bode, utilizado em 1927 para analisar amplificadores realimentados;
- Harry Nyquist (1889-1976), com o critério de estabilidade de Nyquist, desenvolvido em 1932;

Até por volta de 1940, a teoria e prática do controle desenvolveram-se de maneira diferente nos Estados Unidos e Europa Ocidental, por um lado, e na Rússia e Europa Oriental, pelo outro. O impulso principal para o uso da realimentação nos Estados Unidos foi dado com o desenvolvimento do telefone e dos amplificadores eletrônicos realimentados. O domínio da freqüência foi inicialmente utilizado para descrever a operação dos amplificadores realimentados em termos de banda passante e outras variáveis freqüenciais. Por outro lado, na ex-União Soviética seus eminentes matemáticos e engenheiros mecânicos inspiraram e dominaram o campo da teoria de controle. Logo, a teoria russa tendeu a utilizar uma formulação no domínio do tempo usando equações diferenciais.

Um grande ímpeto para a teoria e prática do controle automático aconteceu durante a Segunda Guerra Mundial, quando se tornou necessário projetar e construir pilotos automáticos de aviões, sistemas de posicionamento de armas, sistemas de controle de antenas de radar e outros sistemas militares baseados na abordagem do controle realimentado. A complexidade e o desempenho esperado desses sistemas militares tornou necessária uma extensão das técnicas de controle disponíveis e fez crescer o interesse nos sistemas de controle. Antes de 1940, na maioria dos casos, o projeto de sistemas de controle era uma arte, baseada em tentativa e erro. Durante os anos 40, métodos matemáticos e analíticos aumentaram em número e em utilidade, e a engenharia de controle tornou-se uma verdadeira disciplina da engenharia.

Técnicas no domínio da freqüência continuaram a dominar o campo do controle nos anos seguintes à Segunda Guerra, com o uso crescente da transformada de Laplace e o plano complexo de freqüências. Nos anos 50, a ênfase na teoria da Engenharia de Controle foi no desenvolvimento e uso de métodos no plano s, particularmente a abordagem do lugar das raízes (*root locus*).

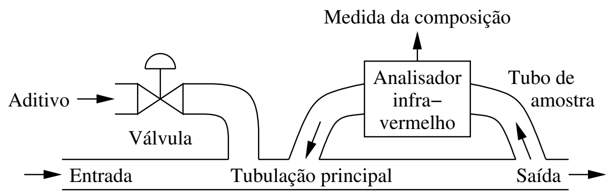
Nos anos 80, a utilização de computadores digitais em sistemas de controle tornou-se rotineira, o que levou à popularização do controle digital e ao desenvolvimento do embasamento teórico necessário para sua plena utilização. O aumento da capacidade de processamento e a redução de custo dos computadores permitiu o desenvolvimento de novas técnicas de controle segundo diversas abordagens. Controle ótimo, controle robusto, controle adaptativo, controle inteligente e combinações destas abordagens fazem parte hoje em dia do conjunto de ferramentas disponíveis na Engenharia de Controle.

Este texto se propõe a apresentar um resumo da teoria básica de controle e de suas aplicações atuais. Os leitores são aconselhados a se dirigirem aos excelentes livros existentes na área [AW97, Bol95, DB95, Gar97, Oga97, PH96] para um aprofundamento nos diversos assuntos. O conteúdo aqui apresentado não pretende ser exaustivo, mas principalmente servir de motivação para estudos subseqüentes.

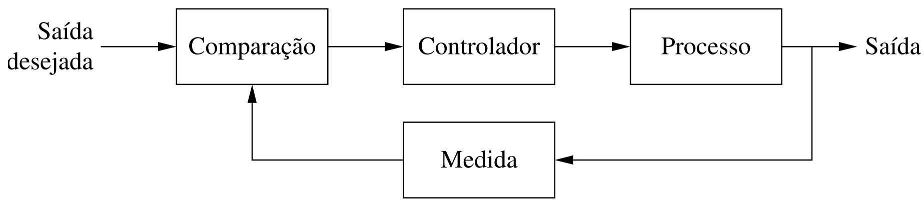
Exercícios

A. Deseja-se projetar um sistema de controle para manter a temperatura da água em um chuveiro elétrico sempre a 60 graus, independentemente da temperatura ambiente e da quantidade de água escoada (que é determinada pela abertura da torneira). Apresente um diagrama de blocos de um sistema capaz de executar esta tarefa, dando explicacões genéricas sobre como os blocos poderiam ser construídos e interligados (não é necessário fazer o projeto final dos componentes do sistema).

B. Em um processo química, deseja-se controlar a composição de uma mistura através da válvula na tubulação do aditivo. Uma medida da composição pode ser obtida utilizando-se um analisador por infravermelhos, como mostrado na figura abaixo. Desenhe um diagrama de blocos de um sistema de controle realimentado para esta planta, descrevendo os sinais de entrada e de saída e a função de cada bloco.



C. O processo de aprendizado envolvendo o estudante e o professor é inerentemente um processo realimentado que procura reduzir o erro do sistema a um mínimo. A saída desejada é o conhecimento sendo estudado, e o estudante pode ser considerado o processo. Construa um modelo realimentado do processo, identificando cada um dos blocos.



D. Muitos carros modernos são equipados com controlador de velocidade de cruzeiro que, ao se pressionar um botão, mantém a velocidade fixada. Desta maneira, o motorista pode guiar a uma velocidade econômica ou na velocidade máxima da estrada, sem necessidade de checar a todo instante o odômetro. Projete um controle realimentado sob a forma de diagrama de blocos para este sistema.

Capítulo 2

Modelos contínuos de sistemas

2.1 Introdução

Para entender e controlar sistemas complexos, devemos obter *modelos matemáticos* quantitativos destes sistemas. É portanto necessário analisar as relações entre as variáveis do sistema. Tendo em vista que os sistemas em consideração dão dinâmicos por natureza, as equações que o descrevem normalmente são *equações diferenciais*. Além disso, se estas equações são lineares ou podem ser *linearizadas*, então a *transformada de Laplace* pode ser utilizada para simplificar o método de solução.

Na prática, a complexidade dos sistemas e a ignorância de certos fatores relevantes tornam necessária a adoção de certas hipóteses simplificadoras a respeito do modo de operação do sistema. Com isto, a abordagem mais usual para análise de um sistema pode ser sumarizada nos seguintes passos:

1. Defina o sistema e seus componentes.
2. Formule o modelo matemático e liste as simplificações necessárias.
3. Escreva as equações diferencias que descrevem o modelo.
4. Resolva as equações para as variáveis de saída desejadas.
5. Examine as soluções e as simplificações.
6. Se necessário, reanalise e reprojete o sistema.

2.2 Equações diferenciais de sistemas físicos

As equações diferenciais descrevendo o desempenho dinâmico de um sistema físico são obtidas das leis físicas do processo. Para sistemas mecânicos translacionais, utiliza-se a lei de Newton; para sistemas elétricos, as leis de Kirchhoff; e assim sucessivamente. Esta abordagem aplica-se igualmente para sistemas mecânicos, elétricos, fluidos e termodinâmicos, bem como a combinações entre eles. Um sumário das variáveis de sistemas dinâmicos é dada na tabela 2.1.

Os sistemas das diversas naturezas freqüentemente podem ser modelados tomando-se como base elementos lineares idealizados. Um sumário das equações descritoras para os principais elementos lineares concentrados é dado na tabela 2.2. Estas equações são

Sistema	Variável através	Variável através integrada	Variável entre	Variável entre integrada
Elétrico	Corrente, i	Carga, q	Tensão, v	—
Mecânico translacional	Força, F	Momento translacional, P	Velocidade linear, v	Deslocamento linear, d
Mecânico rotacional	Torque, T	Momento angular, h	Velocidade angular, ω	Deslocamento angular, θ
Fluido	Vazão, Q	Volume, V	Pressão, P	—
Térmico	Fluxo de calor, q	Energia térmica, H	Temperatura, T	—

Tabela 2.1: Sumário das variáveis "entre" e "através" para sistemas físicos

descrições idealizadas e muitas vezes apenas aproximam as condições reais (por exemplo, quando uma aproximação por um elemento linear concentrado é utilizada em substituição a um elemento distribuído).

As equações da tabela 2.2 representam idealmente as leis físicas que governam os diversos processos. Para sistemas mecânicos, utiliza-se a lei de Newton; para sistemas elétricos, as leis de Kirchhoff; e assim sucessivamente.

Por exemplo, o mecanismo massa-mola-amortecedor da figura 2.1, que pode representar a suspensão de um automóvel, é descrito pela segunda lei do movimento de Newton. Assim,

$$\begin{aligned} F = M \cdot a \Rightarrow \qquad & f(t) - f_b(t) - f_k(t) = M \cdot a \Rightarrow \\ f(t) - b \cdot v - K \cdot y = M \cdot a \Rightarrow \qquad & M \cdot \ddot{y} + b \cdot \dot{y} + K \cdot y = f(t) \end{aligned} \tag{2.1}$$

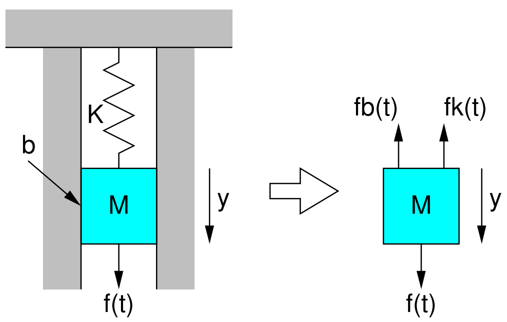


Figura 2.1: Sistema massa-mola-amortecedor típico

Esta equação 2.1 pode também ser escrita em termos da velocidade v, e não em termos do deslocamento y:

$$v(t) = \frac{dy}{dt} \Rightarrow \qquad M\dot{v} + bv + K \int v \cdot dt = f(t) \tag{2.2}$$

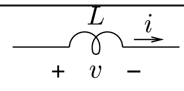
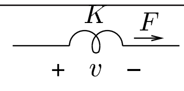
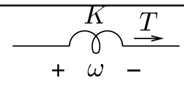
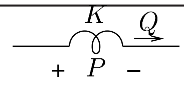
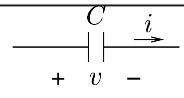
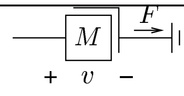
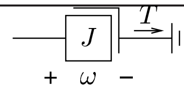
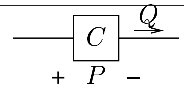
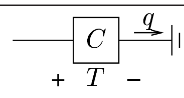
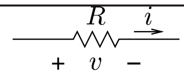
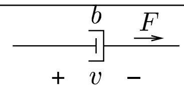
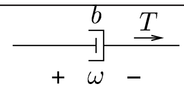
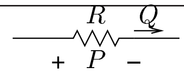
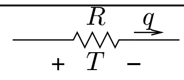
Tipo de elemento	Elemento físico	Equação descritiva	Energia E ou Potência P	Símbolo
Indutivo	Indutância elétrica	$v = L\frac{di}{dt}$	$E = \frac{1}{2}Li^2$	
	Mola translacional	$v = \frac{1}{K}\frac{dF}{dt}$	$E = \frac{1}{2}\frac{F^2}{K}$	
	Mola rotacional	$\omega = \frac{1}{K}\frac{dT}{dt}$	$E = \frac{1}{2}\frac{T^2}{K}$	
	Inércia fluida	$P = I\frac{dQ}{dt}$	$E = \frac{1}{2}IQ^2$	
Capacitivo	Capacitância elétrica	$i = C\frac{dv}{dt}$	$E = \frac{1}{2}Cv^2$	
	Massa (inércia)	$F = M\frac{dv}{dt}$	$E = \frac{1}{2}Mv^2$	
	Momento de inércia	$T = J\frac{d\omega}{dt}$	$E = \frac{1}{2}J\omega^2$	
	Capacitância fluida	$Q = C\frac{dP}{dt}$	$E = \frac{1}{2}CP^2$	
	Capacitância térmica	$q = C\frac{dT}{dt}$	$E = CT$	
Dissipadores	Resistência elétrica	$i = \frac{1}{R}v$	$P = \frac{1}{R}v^2$	
	Amortecedor translacional	$F = bv$	$P = bv^2$	
	Amortecedor rotacional	$T = b\omega$	$P = b\omega^2$	
	Resistência fluida	$Q = \frac{1}{R}P$	$P = \frac{1}{R}P^2$	
	Resistência térmica	$q = \frac{1}{R}T$	$P = \frac{1}{R}T$	

Tabela 2.2: Sumário das equações diferenciais descritoras para elementos ideais

Similarmente, o circuito elétrico RLC da figura 2.2 pode ser descrito pela lei das correntes de Kirchhoff:

$$i_c(t) + i_r(t) + i_l(t) = i(t) \Rightarrow \qquad C \cdot \dot{v} + \frac{1}{R} \cdot v + \frac{1}{L} \cdot \int v \cdot dt = i(t) \tag{2.3}$$

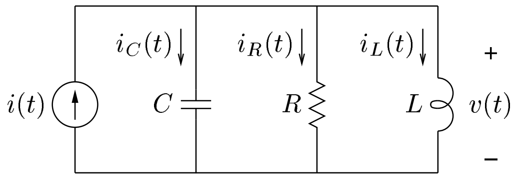


Figura 2.2: Circuito RLC típico

Nota-se imediatamente a equivalência das equações 2.2 e 2.3, onde a velocidade $v(t)$ e a tensão $v(t)$ são variáveis equivalentes. Estas variáveis e seus sistemas são também conhecidos como *análogos*. Logo, para uma determinada corrente $i(t)$ aplicada, a evolução da tensão $v(t)$ será descrita pela mesma função temporal que a velocidade $v(t)$ caso se aplique uma força $f(t)$ descrita pela mesma função temporal que a corrente $i(t)$.

A solução da equação diferencial que descreve ambos estes processos (eq. 2.2 e 2.3) pode ser obtida por métodos clássicos. Por exemplo, quando a massa tem uma velocidade inicial $v(0) = v_0$ ou quando o capacitor tem uma carga inicial tal que $v(0) = v_0$, e o sistema está sujeito a uma força f nula ou a uma corrente i nula, pode-se calcular com relativa facilidade[1] que, se $b^2 < 4KM$ ou $L < 4R^2C$, tem-se que

$$v(t) = c \cdot e^{-\alpha t} sin(\beta t - \theta) \tag{2.4}$$

onde os coeficientes têm os valores dados na tabela 2.3. Uma curva típica correspondente a este tipo de sistema (conhecidos como *sub-amortecidos*) está indicada na figura 2.3.

Sistema	c	α	β	θ
Massa-mola-amortecedor	$-v_0 \frac{2\sqrt{KM}}{\sqrt{4KM-b^2}}$	$\frac{b}{2M}$	$\frac{\sqrt{4KM-b^2}}{2M}$	$\tan^{-1} \frac{\sqrt{4KM-b^2}}{b}$
Resistor-indutor-capacitor	$-v_0 \frac{2R\sqrt{C}}{\sqrt{4R^2C-L}}$	$\frac{1}{2RC}$	$\frac{\sqrt{4R^2C-L}}{2RC\sqrt{L}}$	$\tan^{-1} \sqrt{\frac{4R^2C-L}{L}}$

Tabela 2.3: Coeficientes das soluções dos sistemas massa-mola-amortecedor e RLC

2.3 Aproximação linear de sistemas não-lineares

A maioria dos sistemas físicos pode ser considerada linear dentro de alguma faixa de variação das suas variáveis. Entretanto, todos os sistemas terminam tornando-se não-lineares

[1]Sugere-se que o cálculo desta solução seja feito como exercício para relembrar os métodos de resolução de equações diferenciais, principalmente utilizando a transformada de Laplace.

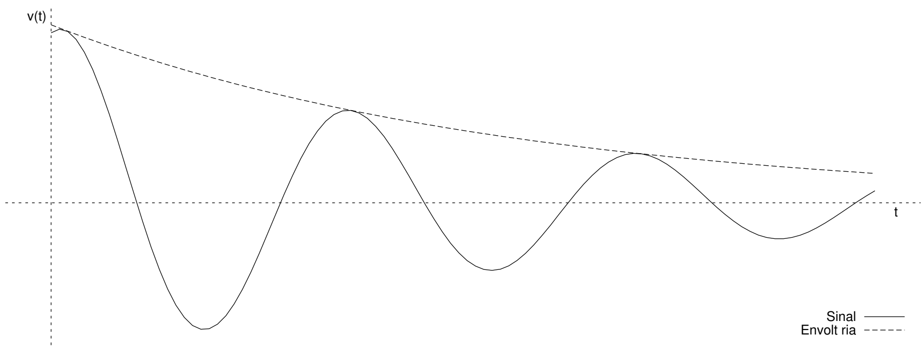


Figura 2.3: Sinal de saída típico para circuito massa-mola-amortecedor ou RLC

quando as variáveis crescem sem limites. Por exemplo, o sistema massa-mola-amortecedor da figura 2.1 é linear e descrito pela equação 2.1 enquanto a massa for submetida a pequenos deslocamentos $y(t)$. Entretanto, se $y(t)$ aumentar excessivamente, a mola será demasiadamente extendida e terminará por se romper. Logo, a questão da linearidade e faixa de usabilidade deve ser considerada para todo sistema.

Um sistema é definido como linear em termos da excitação e da resposta do sistema. No caso da rede elétrica da figura 2.2, a excitação é a corrente de entrada $i(t)$ e a resposta, a tensão $v(t)$. Em geral, uma *condição necessária* para um sistema linear pode ser determinada em termos de uma excitação $x(t)$ e de uma resposta $y(t)$. Quando um sistema em repouso é submetido a uma excitação $x_1(t)$, ele fornece uma resposta $y_1(t)$. Além disso, quando o sistema é submetido a uma outra excitação $x_2(t)$, ele fornece a resposta correspondente $y_2(t)$. Para um sistema linear, é *necessário* que a excitação $x_1(t) + x_2(t)$ resulte em uma resposta $y_1(t) + y_2(t)$. Isto é normalmente conhecido como o *princípio da superposição*.

Além disso, é necessário que um fator de escala de magnitude seja preservado em um sistema linear. Novamente, considere um sistema com uma entrada x que resulta em uma saída y. Então é necessário que a resposta de um sistema linear a uma constante β de uma entrada x seja igual à resposta ao sinal de entrada original multiplicada pela mesma constante, ou seja, a saída é igual a βy. Isto é chamado a propriedade da *homogeneidade*.

Um sistema é linear se e somente se satisfaz as propriedades de superposição e homogeneidade. Isto pode ser expresso matematicamente da seguinte forma: se um sistema em repouso é submetido a uma excitação $x_1(t)$ e fornece uma resposta $y_1(t)$; para uma outra excitação $x_2(t)$, fornece a resposta correspondente $y_2(t)$; então este sistema será linear se e somente se, para uma excitação $\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$, ele fornecer a resposta $\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$.

Um sistema caracterizado pela relação $y = x^2$ não é linear, porque o princípio da superposição não é satisfeito. Um sistema representado pela relação $y = mx + b$ é não-linear, porque não satisfaz a propriedade de homogeneidade. Entretanto, este último dispositivo pode ser considerado linear em torno de um ponto de operação (x_{PO}, y_{PO}) para pequenas mudanças Δx e Δy. Quando $x_1 = x_{PO}$ temos $y_1 = mx_1 + b = mx_{PO} + b = y_{PO}$.

Quando $x_2 = x_{PO} + \Delta x$, temos

$$\begin{aligned} y_2 &= mx_2 + b \\ &= m(x_{PO} + \Delta x) + b \\ &= y_{PO} + m\Delta x \end{aligned}$$

Logo, a variação Δy do sinal de saída em torno do seu valor no ponto de operação y_{PO} é dada por

$$\begin{aligned} \Delta y &= y_2 - y_{PO} \\ &= (y_{PO} + m\Delta x) - y_{PO} \\ &= m\Delta x \end{aligned}$$

Portanto, a relação entre Δy e Δx é dada por uma relação linear: $\Delta y = m\Delta x$.

Utilizando este princípio, podemos geralmente linearizar elementos não-lineares assumindo condições de pequenos sinais. Esta é a abordagem normal usada para se obter equivalentes lineares de circuitos eletrônicos e transistores. Considere um elemento genérico com uma variável de excitação $x(t)$ e uma variável de resposta $y(t)$. A relação das duas variáveis é dada por

$$y(t) = g[x(t)] \tag{2.5}$$

O ponto de operação normal é designado por x_{PO}. Supondo que a função $g(\cdot)$ é contínua na faixa de operação, uma expansão em *série de Taylor* em torno do ponto de operação pode ser utilizada:

$$y = g(x) = g(x_{PO}) + \left.\frac{dg}{dx}\right|_{x=x_{PO}} \frac{(x - x_{PO})}{1!} + \left.\frac{d^2g}{dx^2}\right|_{x=x_{PO}} \frac{(x - x_{PO})^2}{2!} + \cdots \tag{2.6}$$

Assumindo-se pequenas variações em torno do ponto de operação, a grandeza $\Delta x = x - x_{PO}$ é pequena, de modo que a função $g(\cdot)$ pode ser suficientemente bem representada conservando-se apenas o primeiro termo da série. Assim, com uma aproximação razoável, a equação 2.6 torna-se

$$y = g(x_{PO}) + \left.\frac{dg}{dx}\right|_{x=x_{PO}} (x - x_{PO}) = y_{PO} + m(x - x_{PO}) \tag{2.7}$$

Finalmente, a equação 2.7 pode ser reescrita como uma equação linear:

$$\begin{aligned} (y - y_{PO}) &= m(x - x_{PO}) \\ \Delta y &= m\Delta x \end{aligned} \tag{2.8}$$

O ponto de operação que usualmente se escolhe para fazer a linearização coincide com um ponto de equilíbrio do sistema, ou seja, uma determinada configuração de valores dos sinais de entrada e saída tais que, se o sistema atingir este estado, pode nele permanecer indefinidamente na ausência de perturbações. Por definição, as derivadas de qualquer ordem de todas as variáveis dinâmicas do sistema são nulas no ponto de equilíbrio.

Exemplo 2.3-A: Modelo do pêndulo simples

Considere o pêndulo oscilante mostrado na figura 2.4. O torque aplicado à massa é

$$T = MgL\sin\theta \tag{2.9}$$

onde g é a aceleração da gravidade, M é a massa da esfera e L o comprimento do pêndulo.

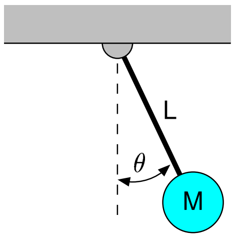


Figura 2.4: Pêndulo simples do exemplo 2.3-A

A condição de equilíbrio para a massa, que será adotada como ponto de operação, é $\theta_{PO} = 0^o$. A aproximação linear é dada por

$$T - T_{PO} \cong MgL \left.\frac{d(\sin\theta)}{d\theta}\right|_{\theta=\theta_{PO}} (\theta - \theta_{PO})$$

onde $T_{PO} = 0$. Assim, tem-se

$$\begin{aligned} T &= MgL(\cos 0^o)(\theta - 0^o) \\ &= MgL\theta \end{aligned} \tag{2.10}$$

Esta aproximação é razoavelmente precisa para a faixa $-\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4$. Por exemplo, a resposta do modelo linear para uma oscilação que não ultrapassa $\pm 30^o$ não difere em mais do que 2% da resposta do modelo não-linear. ■

Se a variável dependente y depende de várias variáveis de excitação, x_1, x_2, $\cdots$, x_n, então a relação funcional entre elas é escrita como

$$y = g(x_1, x_2, \cdots, x_n) \tag{2.11}$$

A expansão em série de Taylor em torno do ponto de operação x_{1PO}, x_{2PO}, $\cdots$, x_{nPO} é útil para uma aproximação linear da função não-linear. Quando os termos de segunda ordem em diante são desprezados, a aproximação linear é dada por

$$\begin{aligned} y = g(x_{1PO}, x_{2PO}, \cdots, x_{nPO}) &+ \left.\frac{\partial g}{\partial x_1}\right|_{PO} (x_1 - x_{1PO}) \\ &+ \left.\frac{\partial g}{\partial x_2}\right|_{PO} (x_2 - x_{2PO}) \\ &+ \cdots \\ &+ \left.\frac{\partial g}{\partial x_n}\right|_{PO} (x_n - x_{nPO}) \end{aligned} \tag{2.12}$$

Este conceito pode ser estendido para linearizar-se equações diferenciais, desde que se adote como ponto de operação um ponto de equilíbrio. O procedimento a ser adotado é considerar-se cada derivada de uma variável como uma variável independente, e em seguida proceder-se à linearização, conforme o exemplo 2.3-B.

Exemplo 2.3-B: Linearização de equação diferencial não-linear

Seja um sistema descrito pela equação

$$\ddot{y} + y^2\dot{y} + 2y = u \tag{2.13}$$

Deseja-se linearizar este modelo em torno do ponto de equilíbrio do sistema quando $u = u_{PO}$. No ponto de equilíbrio, como $\ddot{y}_{PO} = 0$ e $\dot{y}_{PO} = 0$, tem-se que $y_{PO} = u_{PO}/2$.

Fazendo-se uma mudança de variáveis na equação 2.13, obtém-se a equação equivalente

$$z = g(u_1, u_2, u_3) = -{u_1}^2 u_2 - 2u_1 + u_3 \tag{2.14}$$

onde as novas variáveis são definidas como

$$\begin{array}{cccc} z = \ddot{y} & u_1 = y & u_2 = \dot{y} & u_3 = u \\ z_{PO} = 0 & u_{1PO} = y_{PO} = \dfrac{u_{PO}}{2} & u_{2PO} = 0 & u_{3PO} = u_{PO} \end{array}$$

A aproximação linear da equação 2.14 pode então ser facilmente calculada:

$$z = z_{PO} + \left.\frac{\partial g}{\partial u_1}\right|_{PO} (u_1 - u_{1PO}) + \left.\frac{\partial g}{\partial u_2}\right|_{PO} (u_2 - u_{2PO}) + \left.\frac{\partial g}{\partial u_3}\right|_{PO} (u_3 - u_{3PO})$$

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{\partial g}{\partial u_1} = -2u_1u_2 - 2 & \dfrac{\partial g}{\partial u_2} = -{u_1}^2 & \dfrac{\partial g}{\partial u_3} = 1 \\ \left.\dfrac{\partial g}{\partial u_1}\right|_{PO} = -2 & \left.\dfrac{\partial g}{\partial u_2}\right|_{PO} = -\dfrac{{u_{PO}}^2}{4} & \left.\dfrac{\partial g}{\partial u_3}\right|_{PO} = 1 \end{array}$$

$$z = -2(u_1 - u_{1PO}) - \left(\frac{{u_{PO}}^2}{4}\right) u_2 + (u_3 - u_{3PO}) \Rightarrow$$

$$\ddot{y} = -2(y - y_{PO}) - \left(\frac{{u_{PO}}^2}{4}\right) \dot{y} + (u - u_{PO}) \tag{2.15}$$

Definindo-se novas variáveis $\Delta y = y - y_{PO}$ e $\Delta u = u - u_{PO}$, sabe-se que $\dot{\Delta y} = \dot{y}$ e que $\ddot{\Delta y} = \ddot{y}$. Com isto, a equação 2.15 pode ser reescrita em termos de Δy e Δu:

$$\ddot{\Delta y} + \left(\frac{{u_{PO}}^2}{4}\right) \dot{\Delta y} + 2\Delta y = \Delta u \tag{2.16}$$

A equação 2.16 relaciona de forma linear pequenas variações no sinal de entrada u em torno do valor u_{PO} com pequenas variações no sinal de saída y em torno do valor y_{PO}. ■

Uma vez linearizado o modelo, ele pode ser utilizado em conjunto com as técnicas usuais de resolução de equações diferenciais para se obter resultados referentes ao desempenho dinâmico do sistema. Uma demonstração desta metodologia é dada no exemplo 2.3-C.

Exemplo 2.3-C: Sistema com mola não-linear

O corpo de massa $M = 1.0$kg da figura 2.5 está preso a uma mola não-linear cuja força elástica é proporcional ao quadrado do deslocamento, ou seja, $f_k(t) = Ky^2(t)$. A mola tem constante elástica $K = 25\text{N/m}^2$. A massa desliza sobre uma superfície que apresenta um coeficiente de atrito viscoso com o corpo $b = 3\text{Ns/m}$.

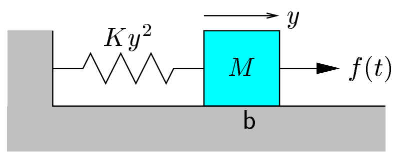


Figura 2.5: Sistema com mola não-linear do exemplo 2.3-C

Supondo uma aproximação linear, calcule a função que melhor descreve o deslocamento $y(t)$ quando o corpo inicialmente em repouso é submetido a uma força em Newtons dada por $f(t) = 9 + 0.3 \sin t$, conforme indicado na figura 2.6.

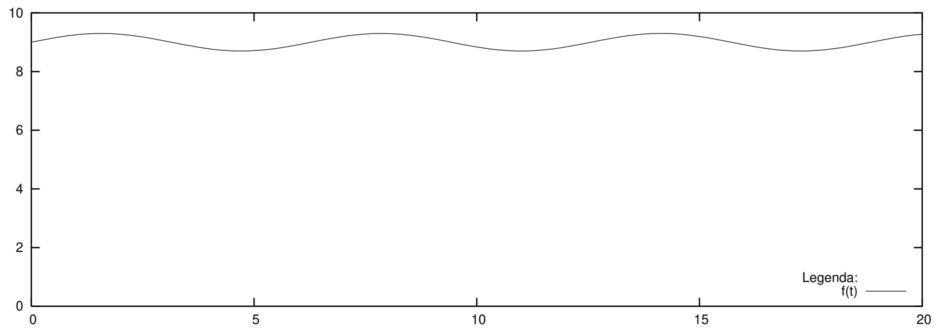


Figura 2.6: Força aplicada ao sistema com mola não-linear da figura 2.5

Das leis de Newton, pode-se deduzir que este sistema é modelado pela equação:

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 25y^2 = f \tag{2.17}$$

Para um ponto de operação $f = f_{PO}$, o equilíbrio do sistema (ou seja, o ponto onde $\ddot{y} = 0$ e $\dot{y} = 0$) é alcançado para:

$$25{y_{PO}}^2 = f_{PO} \quad \Rightarrow \quad y_{PO} = 0.2\sqrt{f_{PO}}$$

O modelo linearizado do sistema neste ponto de operação é dado por

$$\ddot{\Delta y} + 3\dot{\Delta y} + 50y_{PO}\Delta y = \Delta f \tag{2.18}$$

Como $f(t) = 9+0.3\sin t$, o ponto de operação mais natural para esta condição de operação é $f_{PO} = 9$, o que implica $y_{PO} = 0.6$. Com isto, a equação 2.18 assume os coeficientes

$$\ddot{\Delta y} + 3\dot{\Delta y} + 30\Delta y = \Delta f \tag{2.19}$$

onde $\Delta y = y - 0.6$ e $\Delta f = f - 9$.

A equação 2.19 pode ser resolvida utilizando-se a transformada de Laplace. Se $F(s) = \mathcal{L}[\Delta f(t)]$ e $Y(s) = \mathcal{L}[\Delta y(t)]$, então

$$s^2 Y(s) - s\Delta y(0) - \dot{\Delta y}(0) + 3[sY(s) - \Delta y(0)] + 30Y(s) = F(s)$$

Como o sistema estava inicialmente em repouso, sabe-se que $y(0) = 0$ e $\dot{y}(0) = 0$, o que, em razão das mudanças de variáveis, implica que $\Delta y(0) = -0.6$ e $\dot{\Delta y}(0) = 0$. Portanto, a equação a ser resolvida é:

$$[s^2 + 3s + 30]Y(s) = F(s) - 0.6s - 1.8$$

A seqüência obedece ao procedimento normal de resolução de equações diferenciais utilizando a transformada de Laplace:

$$\Delta f(t) = 0.3\sin t \quad \Rightarrow \quad F(s) = \frac{0.3}{s^2+1}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+3s+30}\left(\frac{0.3}{s^2+1} - 0.6s - 1.8\right) = \frac{-0.6s^3 - 1.8s^2 - 0.6s - 1.5}{(s^2+1)(s^2+3s+30)}$$

Expandindo em frações parciais:

$$Y(s) = \frac{0.01024}{s^2+1} - \frac{0.001059s}{s^2+1} - \frac{1.807}{s^2+3s+30} - \frac{0.5989s}{s^2+3s+30}$$

Consultando a tabela de transformadas inversas de Laplace do apêndice A:

$$\begin{aligned}
\Delta y(t) &= 0.01024\sin t - 0.001059\cos t - (1.807/30)[5.695e^{-1.5t}\sin(5.268t)] \\
&\quad - 0.5989[e^{-1.5t}\cos(5.268t) - 0.2847e^{-1.5t}\sin(5.268t)] \quad \Rightarrow \\
\Delta y(t) &= 0.01024\sin t - 0.001059\cos t - e^{-1.5t}[0.1725\sin(5.268t) + 0.5989\cos(5.268t)]
\end{aligned}$$

Finalmente, lembrando que $\Delta y = y - 0.6$, chega-se à expressão final para $y(t)$:

$$\begin{aligned}
y(t) &= 0.6 + 0.01024\sin t - 0.001059\cos t \\
&\quad - e^{-1.5t}[0.1725\sin(5.268t) + 0.5989\cos(5.268t)] \\
y(t) &= 0.6 + 0.01029\sin(t - 0.1030) - 0.6232e^{-1.5t}\cos(5.268t - 0.2804) \qquad (2.20)
\end{aligned}$$

O gráfico da função descrita pela equação 2.20 e o gráfico da resposta exata do modelo, calculada por resolução numérica da equação 2.17, aparecem na figura 2.7. Conforme se percebe, a precisão da resposta aproximada é maior no regime permanente, pois o sistema está mais próximo do ponto de operação em torno do qual o modelo linearizado foi obtido. De uma maneira geral, entretanto, o modelo aproximado descreve com boa semelhança o comportamento dinâmico do sistema. ■

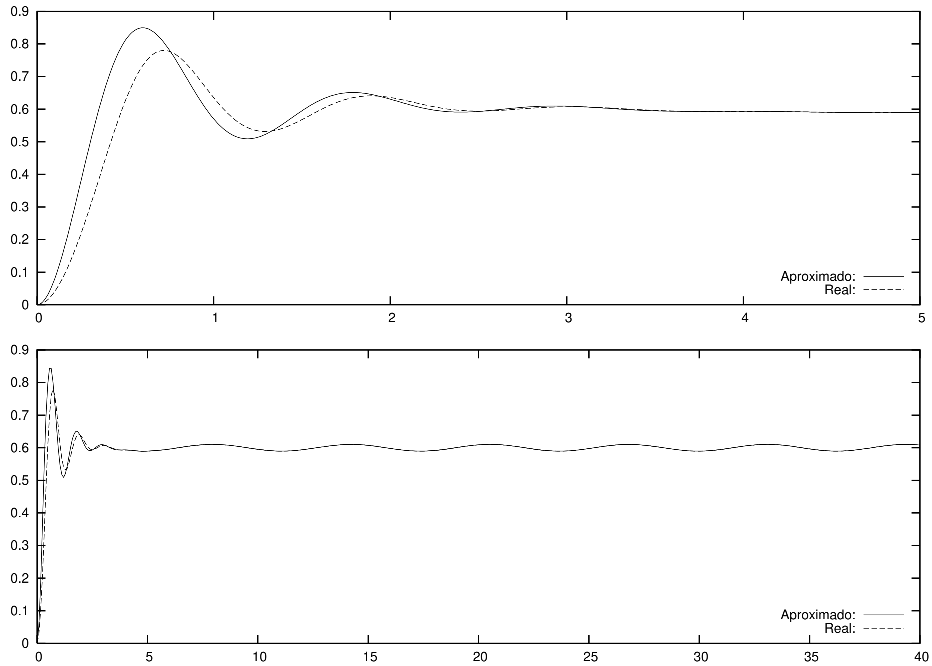


Figura 2.7: Resposta do sistema com mola não-linear da figura 2.5

2.4 Funções de transferência

A *função de transferência* de um sistema linear é definida como sendo a relação entre a transformada de Laplace da variável de saída e a transformada de Laplace da variável de entrada, com todas as condições iniciais assumidas como nulas. Funções de transferências só podem ser definidas para sistemas lineares e invariantes no tempo.

A função de transferência de um sistema é facilmente obtida da equação diferencial que o descreve, assumindo-se condições iniciais nulas. Por exemplo, para o sistema RLC da figura 2.2, descrito pela equação 2.3, a função de transferência $G(s)$ é dada por:

$$C \cdot \dot{v} + \frac{1}{R} \cdot v + \frac{1}{L} \cdot \int v \cdot dt = i(t) \quad \Rightarrow \quad C \cdot sV(s) + \frac{1}{R} \cdot V(s) + \frac{1}{L} \cdot \frac{V(s)}{s} = I(s) \quad \Rightarrow$$

$$G(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = \frac{RLs}{RLCs^2 + Ls + R}$$

2.5 Diagramas de blocos

Os sistemas dinâmicos em engenharia de controle são normalmente representados pela sua função de tranferência, relacionando as variáveis de entrada e de saída através de uma relação de causa e efeito. Para sistemas lineares compostos de vários subsistemas, a representação em *diagrama de blocos* é predominante na engenharia de controle. Um diagrama de blocos consiste em um conjunto de blocos operacionais *unidirecionais* que representam a função de transferência dos subsistemas, blocos estes interligados de forma a expressar as relações de interdependência das variáveis dentro do sistema.

A representação em diagrama de blocos de um determinado sistema freqüentemente pode ser reduzida a um diagrama de blocos simplicado utilizando técnicas de redução. As transformações mais usuais estão representadas na tabela 2.4. A utilidade das transformações será demonstrada através da redução do diagrama de blocos do exemplo 2.5-A.

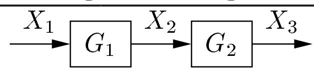
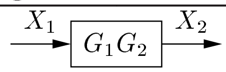
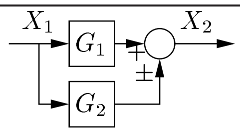
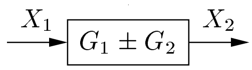
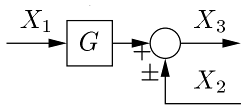
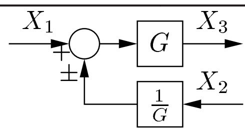
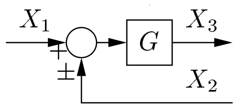
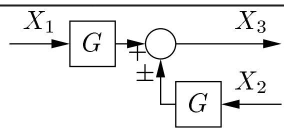
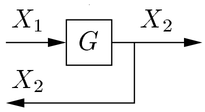
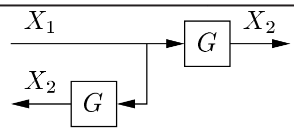
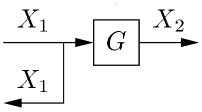
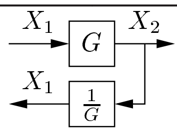
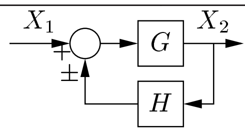
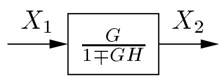
<table>
<tr><th>Transformação</th><th>Diagrama original</th><th>Diagrama equivalente</th></tr>
<tr><td>Combinar blocos em cascata (série)</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Combinar blocos em paralelo</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Mover um somador para antes de um bloco</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Mover um somador para depois de um bloco</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Mover uma derivação para antes de um bloco</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Mover uma derivação para depois de um bloco</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Eliminar um laço realimentado</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Tabela 2.4: Transformações em diagramas de blocos

Exemplo 2.5-A: Simplificação de diagrama de blocos

O diagrama de blocos de um sistema de controle com múltiplos laços de realimentação é mostrado na figura 2.8[2]. É interessante notar que o sinal da realimentação H_1C é positivo; por isso, o laço $G_3(s)G_4(s)H_1(s)$ é chamado de *laço de realimentação positiva*.

[2]As variáveis v_i, $i = 1, 2, \cdots$ que aparecem nesta figura serão úteis posteriormente e podem ser desconsideradas no momento.

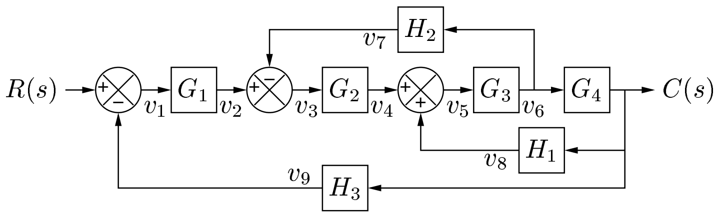


Figura 2.8: Diagrama de blocos do exemplo 2.5-A

O procedimento de redução do digrama de blocos é baseado nas transformações da tabela 2.4, principalmente a que permite eliminar laços realimentados. As outras transformações são utilizadas para modificar o diagrama, de forma a deixá-lo em um formato adequado à eliminação de laços realimentados. A seqüência de transformações aplicada ao diagrama está indicada na figura 2.9. Foram feitas as seguintes operações:

1. Mover H_2 para depois do bloco G_4.
2. Eliminar o laço com realimentação H_1.
3. Eliminar o laço com realimentação H_2/G_4
4. Eliminar o laço com realimentação H_3

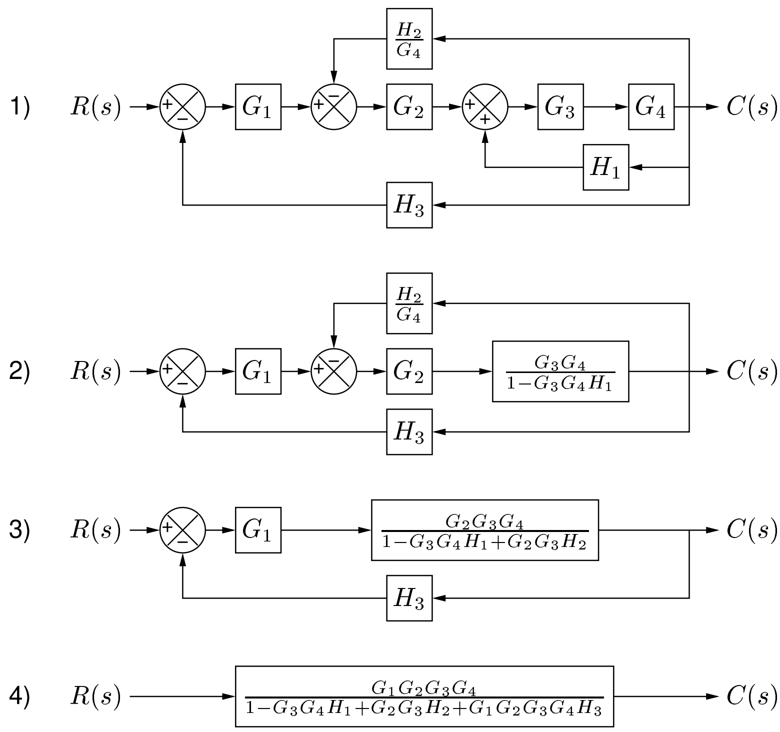


Figura 2.9: Redução do diagrama de blocos da figura 2.8

É interessante verificar-se a forma do numerador e do denominador da função de transferência em malha fechada final. Nota-se que o numerador é composto pelo cascateamento da função de transferência dos elementos que conectam em sentido direto a entrada $R(s)$ com a saída $C(s)$. O denominador é composto de 1 menos a soma das funções de transferência de cada um dos laços. O sinal do laço $G_3G_4H_1$ é positivo porque se trata de um laço de realimentação positiva, enquanto os laços $G_1G_2G_3G_4H_3$ e $G_2G_3H_2$ são laços de realimentação negativa. ■

A forma do numerador e do denominador da função de transferência final do exemplo 2.5-A é bastante próxima da forma geral para funções de transferência de sistemas realimentados com múltiplos laços, que será apresentada na próxima seção.

2.6 Grafos de fluxo de sinal

Os procedimentos de redução de diagrama de blocos podem ser trabalhosos para sistemas com uma certa complexidade. Um método alternativo para determinação de relações entre variáveis de um sistema foi desenvolvido por Mason e é baseado na representação do sistema por segmentos de reta. A vantagem deste método, denominado *método do grafo de fluxo de sinal*, é a existência de uma fórmula de ganho do grafo de fluxo, que dá a relação entre variáveis do sistema sem requerer nenhum procedimento de redução ou manipulação do grafo de fluxo.

Um *grafo de fluxo de sinal* é um diagrama composto de arestas, ou *nós*, conectados por segmentos de retas com direção, ou *ramos*. Cada ramo relaciona a dependência de uma variável de saída com uma variável de entrada, da mesma maneira que um bloco em um diagrama de blocos. Os ramos iniciam-se e terminam-se em nós. Cada nó está associado a uma variável ou sinal.

As relações entre as variáveis são escritas ao lado de cada ramo, sob a forma de um *ganho* associado ao ramo. Todos os ramos deixando um nó passam aos seus respectivos nós de saída o valor da variável associada ao nó de entrada multiplicado pelo ganho do ramo. O somatório de todos os sinais chegando em um nó é igual à variável do nó.

Um *caminho* é um ramo ou uma seqüência contínua de ramos que podem ser atravessados de um sinal (nó) para outro sinal (nó). Um *laço* é um caminho fechado que começa e termina no mesmo nó, sem passar em nenhum nó mais de uma vez. Dois laços não se tocam se eles não têm nenhum nó em comum. Dois laços que se tocam têm ao menos um nó em comum.

A transição de uma representação em diagrama de blocos para uma representação em grafo de fluxo de sinal é imediata. Na figura 2.10 vê-se o grafo de fluxo de sinal equivalente ao diagrama de blocos da figura 2.8, onde se indica para cada nó o sinal correspondente no diagrama de blocos.

A relação de dependência (ou função de transferência, ou ganho) G entre uma variável independente Y (variável de entrada) e uma variável dependente U (variável de saída) é dada pela *regra de Mason*:

$$G = \frac{Y}{U} = \frac{\sum_{i=1}^{N_C} G_i \Delta_i}{\Delta} \tag{2.21}$$

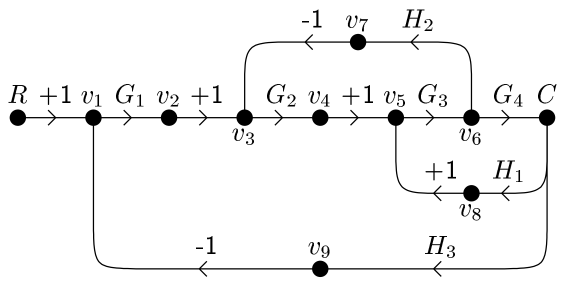


Figura 2.10: Grafo de fluxo de sinal equivalente ao diagrama da figura 2.8

onde:

N_C: número de caminhos existentes de U para Y;
G_i: ganho do i-ésimo caminho;
Δ: determinante do grafo, calculado conforme se explica a seguir;
Δ_i: cofator do i-ésimo caminho; este cofator é calculado da mesma maneira que o determinante Δ, mas são excluídos do cálculo todos os nós que tocam o i-ésimo caminho e todos os laços dos quais estes nós fazem parte.

O determinante Δ de um grafo é dado por

$$\Delta = 1 - \sum_{i=1}^{N_L} L_i + \sum_{j,k} L_j L_k - \sum_{l,m,n} L_l L_m L_n + \cdots \tag{2.22}$$

Nesta equação, N_L é o número de laços do grafo e L_i é o ganho do i-ésimo laço. Os índices j e k assumem todos os possíveis valores de 1 a N_L, desde que o j-ésimo laço e o k-ésimo laço não se toquem. Os índices l, m e n assumem todos os possíveis valores de 1 a N_L, desde que o l-ésimo laço, o m-ésimo laço e o n-ésimo laço não se toquem. E assim sucessivamente. Dito de outra forma, a regra de cálculo de Δ é

$$\begin{aligned}\Delta = 1 &- \sum(\text{ganhos de todos os laços})\\ &+ \sum(\text{produtos dos ganhos de todas as combinações de 2 laços que não se tocam})\\ &- \sum(\text{produtos dos ganhos de todas as combinações de 3 laços que não se tocam})\\ &+ \cdots\end{aligned}$$

Pode-se constatar que a aplicação desta fórmula no grafo da figura 2.10 leva ao mesmo resultado final do exemplo 2.5-A.

Exemplo 2.6-A: Utilização da fórmula de Mason

Com base no grafo de fluxo de sinal da figura 2.11, calcule o ganho G entre a variável de entrada x_1 e a variável de saída x_6.

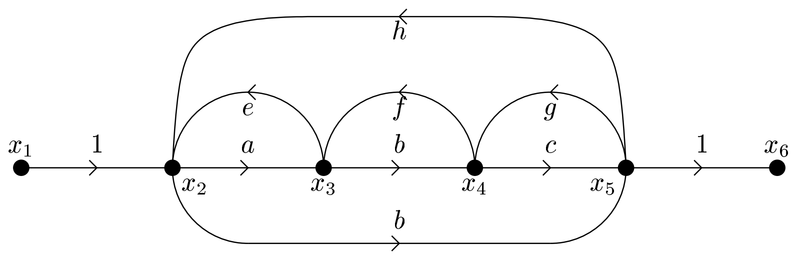


Figura 2.11: Grafo de fluxo de sinal do exemplo 2.6-A

O grafo tem dois caminhos diretos, cujos ganhos são:

$$G_1 = abc \qquad G_2 = d$$

Os ganhos dos seis laços são

$$\begin{array}{lll} L_1 = ae & L_2 = bf & L_3 = cg \\ L_4 = defg & L_5 = abch & L_6 = dh \end{array}$$

O caminho 1 toca todos os laços. O caminho 2 não toca o laço 2. Quanto aos laços que não se tocam, temos os laços 1 e 3 e os laços 2 e 6.

$$\begin{aligned} \Delta &= 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 + L_6) + (L_1 L_3 + L_2 L_6) \\ &= 1 - ae - bf - cg - defg - abch - dh + aecg + bfdh \\ \Delta_1 &= 1 \\ \Delta_2 &= 1 - (L_2) = 1 - bf \end{aligned}$$

Com isso,

$$G = \frac{G_1 \Delta_1 + G_2 \Delta_2}{\Delta} = \frac{abc + d(1 - bf)}{1 - ae - bf - cg - defg - abch - dh + aecg + bfdh}$$

O cálculo deste resultado é bem mais trabalhoso caso sejam empregadas técnicas de redução ao invés da fórmula de Mason. ■

2.7 Modelos em variáveis de estado

O *estado* de um sistema é um conjunto de números tais que o conhecimento desses números, das funções de entrada e das equações que descrevem a dinâmica do sistema fornecem o estado futuro e a saída do sistema. Para um sistema dinâmico, o estado de um sistema é descrito em termos de um conjunto de *variáveis de estado* $[x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)]$. O espaço n-dimensional cujos eixos coordenados correspondem às variáveis $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ é chamado de *espaço de estados*: qualquer estado do sistema pode ser representado por um ponto no espaço de estados.

Exemplo 2.7-A: Modelagem de sistema em variáveis de estado

Um exemplo de caracterização de um sistema através de variáveis de estado pode ser obtido para o circuito RLC da figura 2.12. O estado desse sistema pode ser descrito em termos de um conjunto de variáveis (x_1, x_2), onde x_1 é a tensão no capacitor $v_C(t)$ e x_2 é igual à corrente no indutor $i_L(t)$.

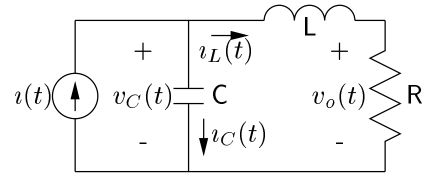


Figura 2.12: Circuito RLC a ser modelado em variáveis de estado

Esta escolha de variáveis é intuitivamente satisfatória porque a energia armazenada no circuito pode ser descrita em termos dessas variáveis:

$$E = \frac{L\imath_L^2}{2} + \frac{Cv_C^2}{2}$$

Logo, $x_1(t_0)$ e $x_2(t_0)$ representam a energia inicial total do circuito e portanto o estado do sistema em $t = t_0$. Para uma rede RLC passiva, o número de variáveis de estado é igual ao número de elementos armazenadores de energia (capacitores e indutores) independentes.

Quando se utilizam modelos baseados em variáveis de estado, a dinâmica do sistema é descrita por um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem. Estas equações exprimem a derivada de cada uma das variáveis de estado em termos das variáveis de estado e dos sinais de entrada. O sinal de saída também deve ser expresso em função das variáveis de estado e dos sinais de entrada. Para o circuito da figura 2.12, estas equações podem ser obtidas a partir da aplicação das leis de Kirchhoff:

$$\imath = \imath_C + \imath_L \quad \Rightarrow \quad \imath = C\dot{v_C} + \imath_L \quad \Rightarrow \quad \dot{x_1} = -\left(\frac{1}{C}\right)x_2 + \left(\frac{1}{C}\right)\imath \tag{2.23}$$

$$v_C = v_L + v_R \quad \Rightarrow \quad v_C = L\dot{\imath_L} + R\imath_L \quad \Rightarrow \quad \dot{x_2} = \left(\frac{1}{L}\right)x_1 - \left(\frac{R}{L}\right)x_2 \tag{2.24}$$

$$v_o = R\imath_L \quad \Rightarrow \quad v_o = Rx_2 \tag{2.25}$$

Usando as equações 2.23 e 2.24 e as condições iniciais $[x_1(t_0), x_2(t_0)]$, e conhecendo-se o sinal de entrada $\imath(t)$, pode-se determinar o estado do sistema $[x_1(t), x_2(t)]$ para qualquer instante de tempo $t \geq t_0$. Conhecido o estado, pode-se também saber o valor instantâneo do sinal de saída a partir da equação 2.25. ■

As variáveis de estado que descrevem um sistema não são únicas, e infinitos conjuntos de diferentes variáveis de estado podem ser escolhidos. Qualquer combinação linear das variáveis de estado também pode ser adotada como variável de estado. Por exemplo, para o circuito da figura 2.12, pode-se também adotar as variáveis de estado $x_1^* = v_C$ e $x_2^* = v_L$, onde v_L é a queda de tensão no indutor. Dessa definição, deduz-se que:

$$x_1 = x_1^* \tag{2.26}$$

$$x_2^* = v_C - R\imath_L = x_1 - Rx_2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{1}{R}(x_1^* - x_2^*) \tag{2.27}$$

Substituindo-se as equações 2.26 e 2.27 nas equações 2.23, 2.24 e 2.25, chega-se a:

$$\dot{x}_1^* = -\left(\frac{1}{RC}\right)x_1^* + \left(\frac{1}{RC}\right)x_2^* + \left(\frac{1}{C}\right)\imath \tag{2.28}$$

$$\dot{x}_2^* = -\left(\frac{1}{RC}\right)x_1^* + \left(\frac{1}{RC} - \frac{R}{L}\right)x_2^* + \left(\frac{1}{C}\right)\imath \tag{2.29}$$

$$v_o = x_1^* - x_2^* \tag{2.30}$$

O circuito da figura 2.12 tanto pode ser representado pelo modelo em variáveis de estado das equações 2.23, 2.24 e 2.25 quanto pelo modelo em variáveis de estado das equações 2.28, 2.29 e 2.30. Portanto, a representação no espaço de estados de um dado sistema não é única, apesar do número de variáveis de estado ser o mesmo para qualquer uma das diferentes representações do mesmo sistema. O número n de variáveis de estados necessárias para representar um sistema correponde à *ordem* do sistema.

O conjunto de equações que constitui o modelo em variáveis de estado de um sistema pode ser escrito de forma compacta utilizando-se uma notação vetorial:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ \mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \end{cases} \tag{2.31}$$

O vetor coluna $\mathbf{x}(t)$, constituído pelas n variáveis de estado, é chamado de *vetor de estado*:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix}$$

O vetor coluna $\mathbf{u}(t)$, constituído pelos m sinais de entrada, é chamado de *vetor de entrada*. O vetor coluna $\mathbf{y}(t)$, constituído pelos p sinais de saída, é chamado de *vetor de saída*. Para sistemas monovariáveis (ou seja, $m = p = 1$), os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{y}$ tornam-se escalares.

A primeira equação do sistema de equações 2.31 expressa a evolução dinâmica do estado do sistema e é conhecida como *equação diferencial de estado*, ou simplesmente *equação de estado*. A segunda equação do sistema 2.31 mostra a composição do sinal de saída e é conhecida como *equação de saída*. No caso geral, as funções vetoriais $\mathbf{f}$ e $\mathbf{g}$ dependem do vetor de estado e do vetor de entrada; para sistemas variantes no tempo, dependem também do tempo.

Para sistemas lineares invariantes no tempo, o modelo no espaço de estados pode ser escrito sob a forma matricial:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathsf{A}\mathbf{x} + \mathsf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathsf{C}\mathbf{x} + \mathsf{D}\mathbf{u} \end{cases} \tag{2.32}$$

Uma representação em diagrama de blocos da equação 2.32 é mostrada na figura 2.13. A matriz A é uma matriz quadrada $n \times n$. B é uma matriz $n \times m$, que recai em um vetor coluna $n \times 1$ para sistemas monovariáveis. C é uma matriz $p \times n$, que se torna um vetor linha $1 \times n$ para sistemas monovariáveis. Finalmente, a matrix D, de dimensões $p \times m$, transforma-se em um escalar no caso monovariável; para muitos sistemas, a matriz D é nula, significando que não há influência direta na entrada na saída.

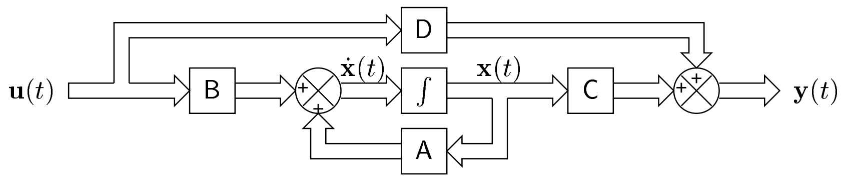


Figura 2.13: Diagrama de blocos de um sistema linear no espaço de estados

A título de exemplo, o sistema descrito pelas equações 2.23, 2.24 e 2.25 poderia ser representado por uma equação matricial no formato da equação 2.32, onde:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} v_C \\ \imath_L \end{bmatrix} \qquad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \imath \end{bmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} v_o \end{bmatrix}$$

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \qquad \mathsf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathsf{C} = \begin{bmatrix} 0 & R \end{bmatrix} \qquad \mathsf{D} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \tag{2.33}$$

A solução do modelo linear no espaço de estados (equação 2.32) para um determinado sinal de entrada pode ser obtida pela utilização da transformada de Laplace:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathsf{A}\mathbf{x}(t) + \mathsf{B}\mathbf{u}(t) \quad \Rightarrow \quad s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathsf{A}\mathbf{X}(s) + \mathsf{B}\mathbf{U}(s) \quad \Rightarrow$$
$$\mathbf{X}(s) = (s\mathsf{I} - \mathsf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) + (s\mathsf{I} - \mathsf{A})^{-1}\mathsf{B}\mathbf{U}(s) \quad \Rightarrow$$
$$\begin{cases} \mathbf{X}(s) = \Phi(s)\mathbf{x}(0) + \Phi(s)\mathsf{B}\mathbf{U}(s) \\ \mathbf{Y}(s) = \mathsf{C}\mathbf{X}(s) + \mathsf{D}\mathbf{U}(s) \end{cases} \qquad \text{onde} \quad \Phi(s) = (s\mathsf{I} - \mathsf{A})^{-1} \tag{2.34}$$

Aplicando-se a transformada inversa de Laplace à matriz $\Phi(s)$, calcula-se a matriz $\Phi(t)$, conhecida como *matriz de transição de estado*:

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\Phi(s) = \mathcal{L}^{-1}\left[(s\mathsf{I} - \mathsf{A})^{-1}\right]$$

Mostra-se que a matriz $\Phi(t)$ pode ser calculada em termos da função exponencial matricial:

$$\Phi(t) = e^{\mathsf{A}t} = \exp(\mathsf{A}t)$$

A função exponencial matricial é definida de maneira similar à função exponencial escalar, através de uma série infinita que converge para todo t finito e qualquer A:

$$e^{\mathsf{A}t} = \exp(\mathsf{A}t) = \mathsf{I} + \mathsf{A}t + \frac{\mathsf{A}^2t^2}{2!} + \cdots + \frac{\mathsf{A}^kt^k}{k!} + \cdots \tag{2.35}$$

Para uma dada matriz A, o valor da função exponencial matricial $e^{\mathsf{A}t}$ pode ser calculado numericamente, truncando-se a série infinita da equação 2.35, ou analiticamente, usando-se o teorema de Cayley-Hamilton, apresentado no apêndice B. As propriedades da função exponencial matricial também estão indicadas no apêndice B.

Exemplo 2.7-B: Cálculo da exponencial matricial

Calcule a função $e^{\mathsf{A}t}$ para uma matriz $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -0.5 \end{bmatrix}$

A equação característica pode ser obtida de:

$$\det(\lambda\mathsf{I} - \mathsf{A}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \det\left(\begin{bmatrix} \lambda+1 & -0.5 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & 0 \\ -1 & -1 & \lambda+0.5 \end{bmatrix}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda+1)^2(\lambda+0.5) = 0$$

A matriz tem portanto um autovalor $\lambda_1 = -0.5$ e dois autovalores $\lambda_2 = \lambda_3 = -1.0$. A função exponencial matricial, pelo teorema de Cayley-Hamilton, pode ser calculada por:

$$\begin{array}{l} f(\mathsf{A}) = e^{\mathsf{A}t} \\ p(\mathsf{A}) = a_1\mathsf{A}^2 + a_2\mathsf{A} + a_3\mathsf{I} \end{array} \quad \Rightarrow \quad f(\mathsf{A}) = p(\mathsf{A}) \quad \text{se} \quad \begin{cases} f(-0.5) = p(-0.5) \\ f(-1.0) = p(-1.0) \\ \dot{f}(-1.0) = \dot{p}(-1.0) \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} e^{-0.5t} = a_1(-0.5)^2 + a_2(-0.5) + a_3 \\ e^{-1.0t} = a_1(-1.0)^2 + a_2(-1.0) + a_3 \\ te^{-1.0t} = 2a_1(-1.0) + a_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a_1 = 4e^{-0.5t} - 4e^{-t} - 2te^{-t} \\ a_2 = 8e^{-0.5t} - 8e^{-t} - 3te^{-t} \\ a_3 = 4e^{-0.5t} - 3e^{-t} - te^{-t} \end{cases}$$

$$e^{\mathsf{A}t} = a_1\mathsf{A}^2 + a_2\mathsf{A} + a_3\mathsf{I} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0.5te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 2e^{-0.5t} - 2e^{-t} & 4e^{-0.5t} - 4e^{-t} - te^{-t} & e^{-0.5t} \end{bmatrix}$$

Constata-se que, para $t = 0$, a matriz $e^{\mathsf{A}t}$ corresponde a uma matriz identidade. ■

A solução da equação 2.34 conduz ao resultado

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)\mathsf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \tag{2.36}$$

Embora este resultado seja genérico e possa ser aplicado a qualquer sistema, geralmente as equações de estado são resolvidas no formato de Laplace, diretamente a partir da equação 2.34, como se mostra no exemplo 2.7-C a seguir. Desta forma, evita-se a necessidade de cálculo da anti-transformada de Laplace da matriz de transição de estado e da integral de convolução que aparecem na equação 2.36.

Exemplo 2.7-C: Resolução de equação de estado

Calcule o sinal de saída $v_o(t)$ para o circuito da figura 2.12 quando C=2.5mF, L=40mH, R=10Ω e $\imath(t)$=0.1A. Suponha que a corrente inicial no indutor é nula [$\imath_L(0) = 0$] e que a tensão inicial no capacitor é de 1V [$v_C(0) = 1$].

Utilizaremos o modelo em variáveis de estado dado pelas equações 2.23, 2.24 e 2.25, que culmina na representação matricial da equação 2.33. A partir das condições iniciais dadas e como o sinal de entrada $\imath(t)$ corresponde a um degrau de amplitude 0.1, tem-se:

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{U}(s) = \begin{bmatrix} \frac{0.1}{s} \end{bmatrix}$$

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -400 \\ 25 & -250 \end{bmatrix} \qquad \mathsf{B} = \begin{bmatrix} 400 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathsf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 10 \end{bmatrix} \qquad \mathsf{D} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$$s\mathsf{I} - \mathsf{A} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -400 \\ 25 & -250 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 400 \\ -25 & s+250 \end{bmatrix}$$

$$\Phi(s) = (s\mathsf{I} - \mathsf{A})^{-1} = \frac{1}{s^2 + 250s + 10.000} \begin{bmatrix} s+250 & -400 \\ 25 & s \end{bmatrix}$$

Da equação 2.34:

$$\mathbf{X}(s) = \Phi(s)\mathbf{x}(0) + \Phi(s)\mathsf{B}\mathbf{U}(s) = \frac{1}{s(s^2 + 250s + 10.000)} \begin{bmatrix} s^2 + 290s + 10.000 \\ 25s + 1.000 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathsf{C}\mathbf{X}(s) + \mathsf{D}\mathbf{U}(s) = \frac{250s + 10.000}{s(s^2 + 250s + 10.000)} = \frac{1}{s} + \frac{0.33}{s+50} - \frac{0.8}{s+200}$$

Portanto, o sinal de saída $v_o(t) = y(t)$ é dado por:

$$v_o(t) = 1 + 0.33e^{-\frac{t}{50}} - 0.8e^{-\frac{t}{200}}$$

A matriz A tem dois autovalores em $\lambda_1 = -\frac{1}{50}$ e $\lambda_2 = -\frac{1}{200}$. Conforme esperado, isto gerou no sinal de saída os termos exponenciais correspondentes $k_1 e^{\lambda_1 t}$ e $k_2 e^{\lambda_2 t}$. Pode-se resolver o problema pelas técnicas clássicas de resolução de circuitos para se verificar que se atinge a mesma expressão final para o sinal de saída. ■

A maior dificuldade na resolução de equações de estado, como no exemplo 2.7-C, é a determinação de $\Phi(s)$, por envolver a inversão de uma matriz não-numérica. O algoritmo de Leverrier, apresentado no apêndice B e ilustrado pelo exemplo 2.7-D a seguir, permite calcular $\Phi(s)$ sem esta inversão.

Exemplo 2.7-D: Aplicação do algoritmo de Leverrier

Aplicando o algoritmo de Leverrier, determine a matriz $\Phi(s) = (s\mathsf{I} - \mathsf{A})^{-1}$ para uma matriz $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Aplicando-se o algoritmo do apêndice B com $n = 3$, que é a dimensão da matriz A:

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{R}_0 = \mathsf{I}\\
&\mathsf{AR}_0 = \mathsf{A}\\
&\alpha_1 = -\operatorname{trace}(\mathsf{AR}_0) = -(-1+0-1) = 2\\
&\mathsf{R}_1 = \mathsf{AR}_0 + \alpha_1\mathsf{I} = \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\\
&\mathsf{AR}_1 = \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -2\end{bmatrix}\\
&\alpha_2 = -\operatorname{trace}(\mathsf{AR}_1)/2 = -(-1-1-2)/2 = 2\\
&\mathsf{R}_2 = \mathsf{AR}_1 + \alpha_2\mathsf{I} = \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\\
&\mathsf{AR}_2 = \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\\
&\alpha_3 = -\operatorname{trace}(\mathsf{AR}_2)/3 = -(-1-1-1)/3 = 1
\end{aligned}
$$

$$\Delta(s) = s^3 + \alpha_1 s^2 + \alpha_2 s + \alpha_3 = s^3 + 2s^2 + 2s + 1$$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{adjunta}(s\mathsf{I} - \mathsf{A}) &= \mathsf{R}_0 s^2 + \mathsf{R}_1 s + \mathsf{R}_2\\
&= \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} s^2 + \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix} s + \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}s^2+s+1 & 0 & 0\\ 0 & s^2+2s+1 & -(s+1)\\ 0 & s+1 & s(s+1)\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$\Phi(s) = (s\mathsf{I} - \mathsf{A})^{-1} = \frac{\operatorname{adjunta}(s\mathsf{I} - \mathsf{A})}{\Delta(s)} = \begin{bmatrix}\frac{s^2+s+1}{s^3+2s^2+2s+1} & 0 & 0\\ 0 & \frac{s^2+2s+1}{s^3+2s^2+2s+1} & -\frac{s+1}{s^3+2s^2+2s+1}\\ 0 & \frac{s+1}{s^3+2s^2+2s+1} & \frac{s(s+1)}{s^3+2s^2+2s+1}\end{bmatrix}$$

Note-se que este algoritmo pode ser facilmente programado em um computador digital. ■

2.7.1 Conversão do espaço de estados para funções de transferência

Dado um modelo no espaço de estados de um sistema monovariável (uma entrada e uma saída), especificado pela matriz A, pelos vetores B e C e pelo escalar D da equação 2.32, pode-se determinar a função de transferência do sistema.

A função de transferência $G(s)$ de um sistema é a relação entre as transformadas de Laplace dos sinais de entrada e de saída, com condições iniciais nulas. Da equação 2.34, supondo $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$, tem-se:

$$\mathbf{X}(s) = \Phi(s)\mathsf{B}U(s) \quad \Rightarrow \quad Y(s) = \mathsf{C}\left[\Phi(s)\mathsf{B}U(s)\right] + DU(s) \quad \Rightarrow$$
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \mathsf{C}\Phi(s)\mathsf{B} + D = \mathsf{C}(s\mathsf{I} - \mathsf{A})^{-1}\mathsf{B} + D \tag{2.37}$$

A inversa de uma matriz M é dada por:

$$\mathsf{M}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathsf{M})} \cdot \operatorname{adj}(\mathsf{M})$$

onde $\det(\mathsf{M})$ é o determinante da matriz M e $\operatorname{adj}(\mathsf{M})$ é a adjunta da matriz M, ou seja, a transposta da sua matriz de cofatores. Portanto, a partir da equação 2.37, a função de transferência $G(s)$ é dada por:

$$G(s) = \frac{\mathsf{C} \cdot \operatorname{adj}(s\mathsf{I} - \mathsf{A}) \cdot \mathsf{B} + D \cdot \det(s\mathsf{I} - \mathsf{A})}{\det(s\mathsf{I} - \mathsf{A})} \tag{2.38}$$

Os valores de s que fazem a função de transferência de um sistema tender para infinito são por definição os *pólos* deste sistema. Pela característica da equação 2.38, os valores de s que fazem o determinante da matriz $s\mathsf{I} - \mathsf{A}$ ser nulo são raízes do denominador da função de transferência e, conseqüentemente, pólos do sistema. Portanto, existe uma equivalência perfeita entre os *autovalores* da matriz A e os pólos da função de transferência $G(s)$, relembrando que um número λ é autovalor de uma matriz quadrada M se e somente se $\det(\lambda\mathsf{I} - \mathsf{M})$ for igual a zero.

Exemplo 2.7-E: Cálculo de função de transferência equivalente

Determine a função de transferência $G(s)$ do sistema descrito pelo modelo:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{cases}$$

Da equação 2.37 tem-se:

$$\Phi(s) = \left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}}{s^2 + 3s + 2} = \frac{0.5s + 2}{s^2 + 3s + 2}$$

Pode-se verificar que tanto os autovalores da matriz A quanto os pólos da função de transferência são iguais a -1 e -2. O sistem tem um zero em $s = -4$. ■

2.7.2 Conversão de funções de transferência para espaço de estados

O processo inverso de conversão onde, dada uma função de transferência $G(s)$, se deseja um modelo equivalente no espaço de estados, não tem uma regra de conversão fixa similar à equação 2.37, pois a representação em variáveis de estado não é única. Alguns métodos foram desenvolvidos, que são apresentados a seguir e demonstrados no apêndice B.

Vamos supor inicialmente que o sistema é representado por uma função de transferência com número de zeros estritamente inferior ao número de pólos, ou seja:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1}s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n} \quad \Rightarrow$$
$$\overset{(n)}{y} + a_1 \overset{(n-1)}{y} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = b_1 \overset{(n-1)}{u} + \cdots + b_{n-1}\dot{u} + b_n u \tag{2.39}$$

Se o sistema é regido pela equação diferencial 2.39 e deseja-se utilizar um conjunto de variáveis de estado que gerem um modelo na *forma canônica controlável*, mostra-se no apêndice B que as matrizes que garantem a equivalência entre os modelos são:

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \qquad \mathsf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\mathsf{C} = \begin{bmatrix} b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & b_2 & b_1 \end{bmatrix} \qquad \mathsf{D} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \tag{2.40}$$

O diagrama de blocos que representa a modelagem de um sistema no espaço de estados usando a fórmula canônica controlável é apresentado na figura 2.14.

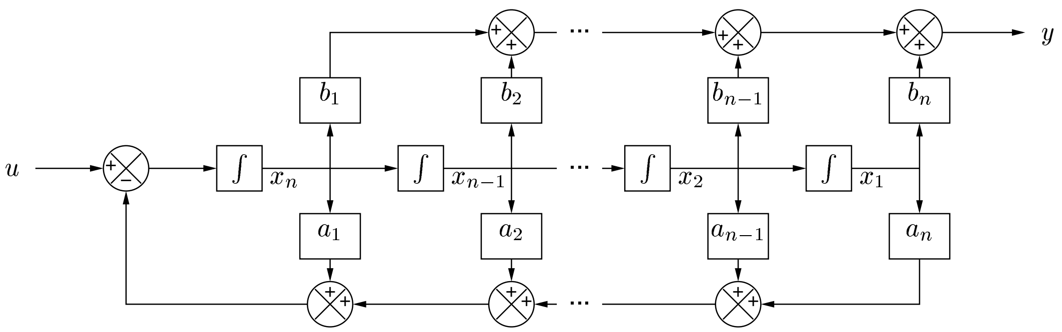


Figura 2.14: Diagrama de blocos equivalente à forma canônica controlável

A forma canônica controlável é particularmente útil quando o sistema não tem zeros, ou seja, quando $b_{n-1} = b_{n-2} = \cdots = b_1 = 0$. Neste caso, as variáveis de estado correspondem às derivadas sucessivas do sinal de saída, ou seja:

$$x_1 = y \qquad x_2 = \dot{y} \qquad x_3 = \ddot{y} \qquad \cdots \qquad x_{n-1} = \overset{(n-2)}{y} \qquad x_n = \overset{(n-1)}{y}$$

Uma segunda possibilidade de conversão é baseada na *forma canônica observável*. Mostra-se no apêndice B que, para esta escolha de variáveis de estado, as matrizes que garantem a equivalência entre os modelos são as indicadas a seguir:

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \qquad \mathsf{B} = \begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ \vdots \\ b_2 \\ b_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathsf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathsf{D} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \tag{2.41}$$

O diagrama de blocos que representa a modelagem de um sistema no espaço de estados usando a fórmula canônica observável é apresentado na figura 2.15.

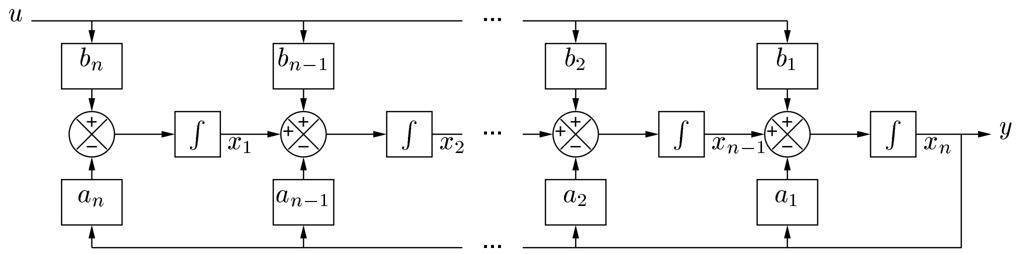


Figura 2.15: Diagrama de blocos equivalente à forma canônica observável

Uma terceira forma de conversão, baseada na *forma canônica de Jordan*, é bastante útil em algumas situações porque, se o sistema tiver apenas pólos reais distintos, este método gera uma matriz A diagonal.

Supondo inicialmente que todos os pólos são distintos, a expansão da função de transferência em frações parciais conduz a:

$$\begin{aligned} G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1}s + b_n}{(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)(s+p_4)\cdots(s+p_n)} \\ &= \frac{c_1}{s+p_1} + \frac{c_2}{s+p_2} + \frac{c_3}{s+p_3} + \frac{c_4}{s+p_4} + \cdots + \frac{c_n}{s+p_n} \end{aligned}$$

A forma canônica de Jordan para este sistema é dada por:

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} -p_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -p_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -p_3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -p_n \end{bmatrix} \qquad \mathsf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathsf{C} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \qquad \mathsf{D} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \tag{2.42}$$

Se o sistema tiver pólos múltiplos, as matrizes da forma canônica de Jordan não mais serão diagonais, passando a conter elementos de valor 1 na supra-diagonal da matriz A e elementos de valor 0 na matriz B. Estes comportamentos singulares ocorrerão nas linhas correspondentes ao pólo múltiplo, exceto a última, conforme demonstra o exemplo 2.7-F a seguir.

Exemplo 2.7-F: Obtenção da forma canônica de Jordan

Determine a forma canônica de Jordan para o caso a seguir, onde o pólo p_1 tem multiplicidade 3.

$$\begin{aligned} G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1}s + b_n}{(s+p_1)^3(s+p_4)\cdots(s+p_n)} \\ &= \frac{c_1}{(s+p_1)^3} + \frac{c_2}{(s+p_1)^2} + \frac{c_3}{s+p_1} + \frac{c_4}{s+p_4} + \cdots + \frac{c_n}{s+p_n} \end{aligned}$$

Para este exemplo, as matrizes passam a ter o seguinte formato:

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} -p_1 & \boxed{1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -p_1 & \boxed{1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -p_n \end{bmatrix} \qquad \mathsf{B} = \begin{bmatrix} \boxed{0} \\ \boxed{0} \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\mathsf{C} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \qquad \mathsf{D} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \tag{2.43}$$

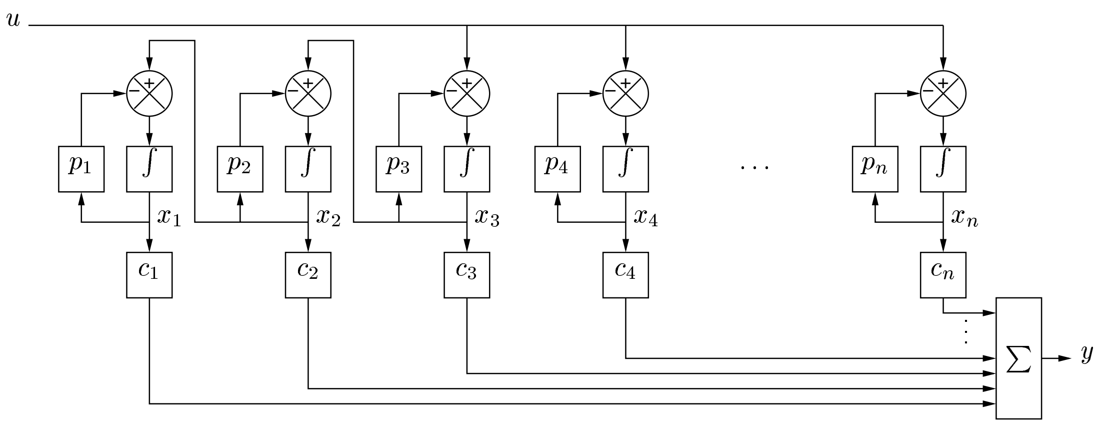


Figura 2.16: Diagrama de blocos equivalente à forma de Jordan da equação 2.43

O diagrama de blocos correspondente é apresentado na figura 2.16. Nota-se que o pólo múltiplo é representado por três conjuntos de blocos similares em cascata, onde o primeiro é alimentado pelo sinal de entrada e os demais pela saída do conjunto precedente. ■

Se o sistema tem um número de zeros maior que o número de pólos, trata-se de um sistema não-causal, que não corresponde a nenhum sistema físico real e que portanto foge aos objetivos da engenharia de controle. No caso de um sistema com número de zeros estritamente igual ao número de pólos, pode-se proceder a uma divisão de polinômios:

$$\begin{aligned} G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{c_0 s^n + c_1 s^{n-1} + \cdots + c_{n-1}s + c_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n} \\ &= c_0 + \frac{b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1}s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n} = c_0 + G'(s) \end{aligned}$$

onde $b_1 = c_1 - c_0 a_1, \cdots, b_{n-1} = c_{n-1} - c_0 a_{n-1}$ e $b_n = c_n - c_0 a_n$. Por conseqüência, o sinal de saída $y(t)$ do sistema é dada por:

$$\begin{aligned} Y(s) = G(s)U(s) = c_0 U(s) + G'(s)U(s) = c_0 U(s) + Y'(s) \quad \Rightarrow \\ y(t) = c_o u(t) + y'(t) \end{aligned}$$

Portanto, o sinal $y(t)$ é igual ao sinal $y'(t)$, que é a saída que teria um sistema que fosse modelado pela função de transferência $G'(s)$, somado ao sinal $c_o u(t)$. Esta componente do sinal de entrada presente no sinal de saída corresponde à matriz D na equação 2.32.

Logo, pode-se representar em variáveis de estado o sistema com função de transferência $G(s)$ da seguinte maneira:

1. calcula-se a função de transferência $G'(s)$;
2. adota-se uma das formas canônicas equivalentes à $G'(s)$ no espaço de estados; e
3. faz-se a matrix D, ao invés de ser nula, corresponder ao valor c_0.

Exemplo 2.7-G: Cálculo de modelos equivalentes no espaço de estados

Para o sistema descrito pela função de transferência

$$G(s) = \frac{0.5s^3 + 3s^2 + 2.5s + 4}{s^3 + 4s^2 + 5s + 2}$$

determine modelos equivalentes no espaço de estados utilizando as formas canônicas controlável, observável e de Jordan.

Fazendo a divisão de polinômios e a expansão em frações parciais:

$$G(s) = 0.5 + \frac{s^2 + 3}{s^3 + 4s^2 + 5s + 2} = 0.5 + \frac{s^2 + 3}{(s+1)^2(s+2)} = 0.5 + \frac{4}{(s+1)^2} - \frac{6}{s+1} + \frac{7}{s+2}$$

Os modelos equivalentes no espaço de estado são:

$$\text{Forma controlável (eq. 2.40):} \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0.5 \end{bmatrix} u \end{cases}$$

$$\text{Forma observável (eq. 2.41):} \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0.5 \end{bmatrix} u \end{cases}$$

$$\text{Forma de Jordan (eq. 2.43):} \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 7 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0.5 \end{bmatrix} u \end{cases}$$

Todas estas três formas modelam o sistema descrito pela função de transferência $G(s)$. A escolha de qual adotar será feita com base na utilização que se pretende dar ao modelo e nas propriedades que cada uma delas garante. ■

Exercícios

A. Assumindo condições iniciais nulas, resolva as equações diferenciais abaixo. Refaça o problema supondo agora $x(0) = 1$ e as demais condições inicias nulas.

$$\dot{x} + 1 = 1 \qquad \ddot{x} + 9x = 1$$
$$\ddot{x} + \dot{x} + 4.25x = t + 1 \qquad \dddot{x} + \ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 10\sin(10t)$$

B. Encontre $x(t)$ para:

$$X(s) = \frac{2}{s^2 + 3s + 4} \qquad X(s) = \frac{10(s + 1.1)}{s(s + 1)(s^2 + 2s + 2)}$$
$$X(s) = \frac{1}{s^3 + 5s^2 + 12s + 8} \qquad X(s) = \frac{10}{s^5 + 4s^4 + 14s^3 + 66s^2 + 157s + 130}$$

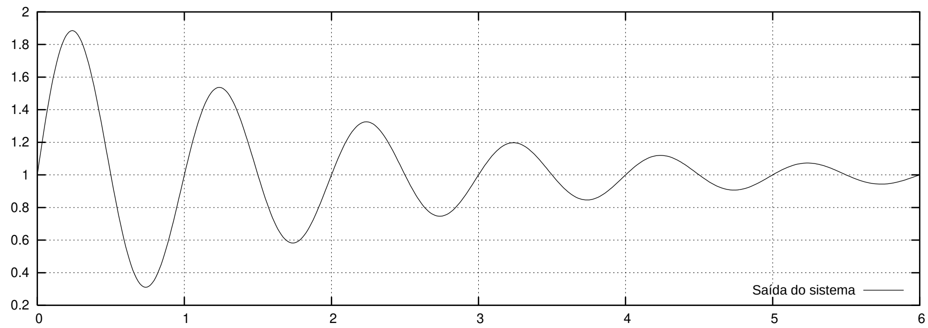
C. A relação entre a tensão E gerada por um termopar e a temperatura T é dada por $E = aT + bT^2$, onde a e b são constantes. Linearize esta equação para um ponto de operação de temperatura T_{PO}.

D. Calcule um modelo linearizado em torno do ponto de equilíbrio para o sistema descrito pela seguinte equação diferencial:

$$\ddot{y} + \sin\dot{y} + (1 + \dot{y})y = u^2$$

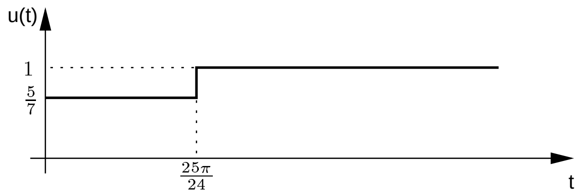
E. Uma entrada $r(t) = e^{-t}$, $t > 0$, é aplicada a uma caixa preta com uma função de transferência $G(s)$. A saída resultante, com condições iniciais nulas, é $c(t) = 2 - 3e^{-t} + e^{-2t}\cos(2t)$, $t > 0$. Determine $G(s)$

F. Deve-se projetar um sistema de controle para uma planta da qual não se conhece o funcionamento interno. Sabe-se apenas que a planta aceita uma tensão v_i como sinal de entrada e o sinal de saída v_o também é uma tensão. Com o sistema em repouso, injetou-se um sinal constante de 1 V na entrada do sistema ($v_i(t) = 1$, $t > 0$) e, com a ajuda de um osciloscópio com memória, traçou-se o gráfico do sinal de saída v_o a seguir, que corresponde a uma senóide exponencialmente amortecida oscilando em torno de um nível constante. Determine com estas informações a função de transferência do sistema $G(s) = V_o(s)/V_i(s)$.

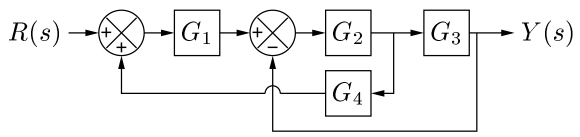


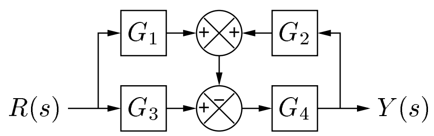
G. Seja o sistema descrito pela função de transferência abaixo. Calcule a saída do sistema quando submetido à entrada indicada no gráfico a seguir.

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 0.56s + 1}$$

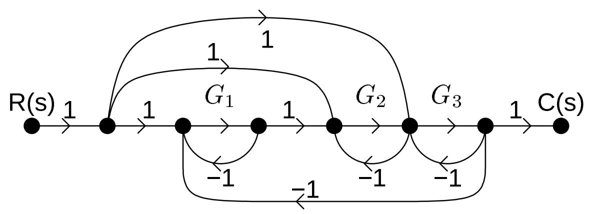


H. Determine a função de transferência $T(s) = Y(s)/U(S)$ dos sistemas a seguir.

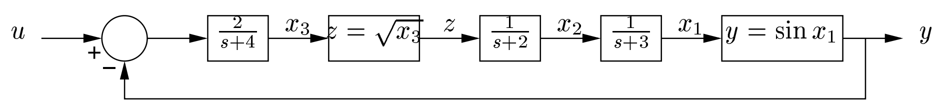




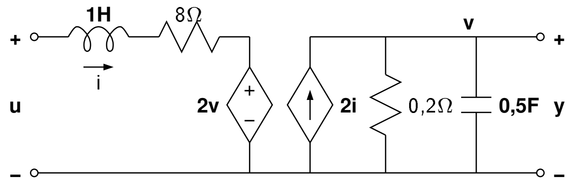
I. Utilizando a fórmula do ganho de Mason, encontre a função de transferência G(s) = C(s)/R(s) do sistema descrito pelo grafo de fluxo de sinais indicado na figura abaixo.



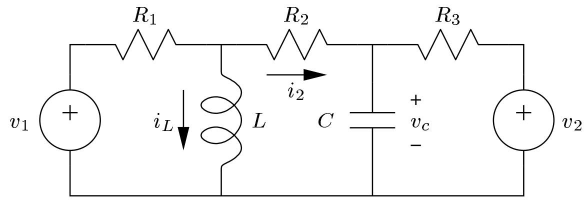
J. Para um sistema que tem a estrutura mostrada na figura abaixo, escreva a equação de estados que descreve o sistema, adotando as variáveis x_1, x_2 e x_3 como variáveis de estado.



K. Obtenha um modelo no espaço de estados para o circuito elétrico abaixo, adotando a tensão v e a corrente i como as variáveis de estado.



L. Obtenha a equação de estados para o sistema de duas entradas e uma saída que corresponde ao circuito abaixo, onde a saída é a corrente i_2.



M. Dada a equação de um sistema

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

determine a solução $x_1(t)$, $x_2(t)$ e $x_3(t)$ em termos de $x_1(0)$, $x_2(0)$ e $x_3(0)$.

N. Obtenha a resposta $y(t)$ do seguinte sistema:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix} x + \begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix} u \qquad y = \begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix} x$$

$$x(0) = \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} \qquad u(t) = \begin{cases}0 & \text{para } t < 0,\\ e^{-t} & \text{para } t \geq 0.\end{cases}$$

O. Considere o sistema descrito por:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix}-5 & -1\\ 3 & -1\end{bmatrix} x + \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} u \qquad y = \begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix} x$$

Obtenha a função de transferência do sistema.

P. Um sistema é representado no espaço de estados pela equação de estado abaixo:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix}-3 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix} x + \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} u \qquad y = \begin{bmatrix}-5 & 5\end{bmatrix} x$$

1. Calcule os pólos e determine a função de transferência do sistema.
2. Fixe valores para os parâmetros a, b e d de forma a que o mesmo sistema possa ser representado de forma equivalente pela equação de estado a seguir:

$$\dot{z} = \begin{bmatrix}0 & -1\\ -a & -b\end{bmatrix} z + \begin{bmatrix}0\\ d\end{bmatrix} u \qquad y = \begin{bmatrix}10 & 0\end{bmatrix} z$$

Q. Obtenha um modelo no espaço de estados para os sistemas que são representados pelos seguintes modelos:

1. $\ddot{y} + 3\dot{y}^2 + 2y = u$
2. $\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = u + 0.5\dot{u}$
3. $G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{2(s+2)}{(s+1)(s+3)}$
4. $G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{2(s+2)(s+4)}{(s+1)(s+3)}$

Capítulo 3

Modelos discretos de sistemas

3.1 Introdução

O uso de computadores digitais como controladores cresceu bastante a partir dos anos 80, em razão do preço, da confiabilidade e da disponibilidade destes equipamentos terem melhorado sensivelmente. Uma conseqüência deste avanço revolucionários na microeletrônica é que praticamente todo sistema de controle construído atualmente é baseado em microprocessadores e/ou sofisticados microcontroladores. Utilizando sistemas controlados por computador, é possível obter-se melhores desempenhos do que com sistemas analógicos, além de novas funcionalidades. Novas ferramentas de *software* também aumentaram dramaticamente a eficiência na análise e projeto de sistemas de controle.

Para sistemas envolvendo dispositivos digitais, os modelos desenvolvidos no capítulo 2 não são suficientes, pois determinados sinais só estão disponíveis em alguns instantes de tempo. Neste capítulo apresentaremos de forma resumida as ferramentas matemáticas necessárias para a modelagem de sistemas discretos, notadamente a transformada $\mathcal{Z}$ e a função de transferência discreta.

3.2 Equações de diferenças

Sistemas contínuos, onde os sinais evoluem continuamente no tempo, são normalmente modelados por equações diferenciais. Sistemas discretos, entretanto, são melhor representados por *equações de diferenças*, onde o valor presente de um sinal $[\ y_k\ ]$ é expresso em função dos valores passados do sinal $[\ y_{k-1}, y_{k-2}, \cdots\ ]$ e dos valores passados e presente do sinal de entrada $[\ u_k, u_{k-1}, u_{k-2}, \cdots\ ]$. Os exemplos a seguir ilustram a modelagem de alguns sistemas por equações de diferenças.

Exemplo 3.2-A: Série de Fibonacci

A série de Fibonacci é uma seqüência de números onde os dois primeiros elementos da série são 1 e os termos restantes são a soma dos dois termos anteriores:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \cdots$$

Modele a série de Fibonacci por uma equação de diferenças e tente descobrir a sua lei formadora resolvendo esta equação.

A partir da regra de formação da série, tem-se que

$$y_k = y_{k-1} + y_{k-2}$$

Vamos tentar descobrir as possíveis soluções por tentativa e erro. Testando-se a possibilidade $y_k = cp^k$, com $c \neq 0$ e $p \neq 0$, chega-se a:

$$cp^k = cp^{k-1} + cp^{k-2} \quad \Rightarrow \quad p^2 - p - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad p = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Portanto, $y_k = c \cdot (1.62)^k$ e $y_k = c \cdot (-0.62)^k$ são duas possíveis soluções da equação de diferenças. Como o sistema é linear,

$$y_k = c_1 \cdot (1.62)^k + c_2 \cdot (-0.62)^k$$

também é solução do sistema, para quaisquer valores de c_1 e c_2. No nosso caso, sabe-se que $y_0 = 1$ e $y_1 = 1$, o que permite determinar valores para os coeficientes c_1 e c_2:

$$y_k = 0.72 \cdot (1.62)^k + 0.28 \cdot (-0.62)^k$$

Esta é portanto a equação de diferenças que modela a série de Fibonacci. A validade da solução pode ser verificada fazendo-se $k = 0, 1, 2, 3, \cdots$ e constatando-se que os termos obtidos correspondem aos esperados. ■

Exemplo 3.2-B:

Supondo que os valores dos sinais são medidos a cada T segundos e que o período T é suficientemente pequeno, obtenha uma equação de diferenças que modela aproximadamente a relação entre um sinal $u_k = u(kT)$ e sua derivada $y_k = \dot{u}(kT)$.

$$y(t) = \dot{u}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{u(t) - u(t - \Delta t)}{\Delta t} \simeq \frac{u(t) - u(t - T)}{T} \quad \Rightarrow$$

$$y(kT) \simeq \frac{u(kT) - u[(k-1)T]}{T} \quad \Rightarrow \quad y_k = \left(\frac{1}{T}\right) u_k - \left(\frac{1}{T}\right) u_{k-1}$$

Portanto, esta é a equação de diferenças que modela aproximadamente o processo de diferenciação, utilizando a aproximação para trás (*backward approximation*). ■

Exemplo 3.2-C:

Supondo que os valores dos sinais são medidos a cada T segundos e que o período T é suficientemente pequeno, obtenha uma equação de diferenças que modela aproximadamente a relação entre um sinal $u_k = u(kT)$ e sua integral $y_k = \int_0^{kT} u(\tau) d\tau$.

Existem diversos algoritmos de integração numérica. Três possibilidades estão indicadas na figura 3.1, que dão origem a três diferentes equações de diferenças:

$$y_k = y_{k-1} + Tu_{k-1} \tag{3.1}$$

$$y_k = y_{k-1} + Tu_k \tag{3.2}$$

$$y_k = y_{k-1} + T\frac{u_k + u_{k-1}}{2} \tag{3.3}$$

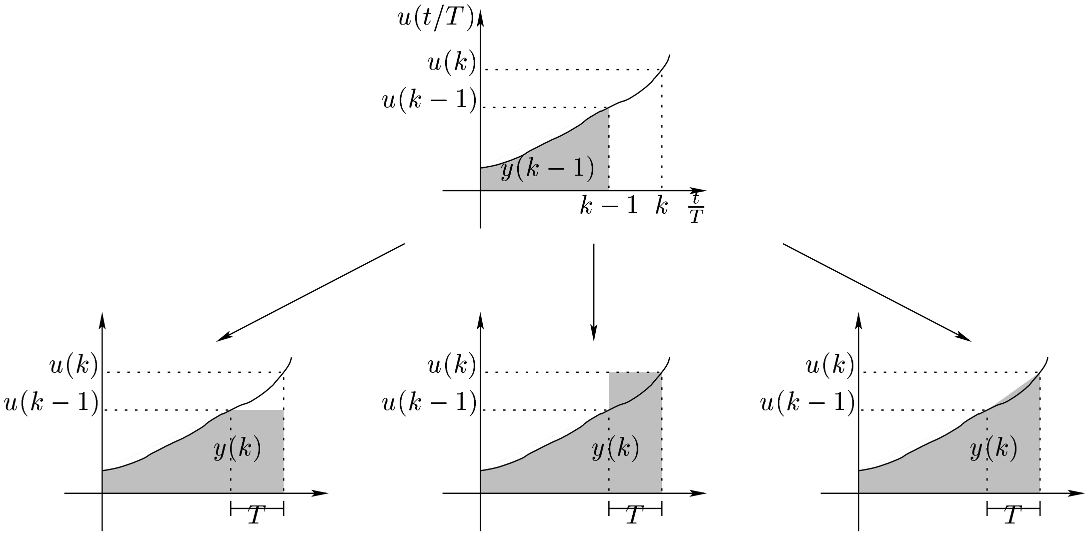


Figura 3.1: Três métodos diferentes de integração numérica

A equação 3.1 corresponde à aproximação para frente (*forward*), ou método de Euler; a equação 3.2, à aproximação para trás (*backward*); e a equação 3.3, ao método trapezoidal, ou aproximação de Tustin. ■

3.3 A transformada $\mathcal{Z}$

Se uma grandeza e_k tem valores discretos $e_0, e_1, e_2, \cdots$, a *transformada* $\mathcal{Z}$ desta grandeza, indicada por $E(z)$, é definida por:

$$E(z) = \mathcal{Z}(e_k) = \sum_{k=0}^{\infty} e_k z^{-k} \tag{3.4}$$

A partir desta definição, demonstra-se que a transformada $\mathcal{Z}$ possui as características lineares de homogeneidade e aditividade, além de outras propriedades úteis, como a possibilidade de representar avanços ou atrasos no tempo por produtos ou divisões por z. As principais propriedades da transformada $\mathcal{Z}$ estão listadas na tabela C.1 do apêndice C.

Exemplo 3.3-A: Transformada $\mathcal{Z}$ do pulso unitário

Calcular $\Delta(z)$, a transformada $\mathcal{Z}$ da seqüência pulso unitário $\delta_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$

$$\Delta(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k \cdot z^{-k} = 1 \cdot z^0 + 0 \cdot z^{-1} + 0 \cdot z^{-2} + \cdots = 1$$

Portanto, a seqüência pulso unitário tem a sua transformada $\mathcal{Z}$ igual a 1. ■

Exemplo 3.3-B: Transformada $\mathcal{Z}$ do degrau unitário

Calcular $U(z)$, a transformada $\mathcal{Z}$ da função degrau unitário $u(t) = 1(t)$.

$$U(z) = \sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot z^{-k} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \cdots$$

Sabe-se que, se $x^2 < 1$,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

Portanto,

$$U(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

Esta é portanto a transformada $\mathcal{Z}$ da função degrau unitário. ■

As transformadas $\mathcal{Z}$ das seqüências mais usuais em controle estão sumarizadas na tabela C.2 do apêndice C. É importante lembrar que a transformada $\mathcal{Z}$ só está definida para seqüências de valores, e não para funções contínuas no tempo. Entretanto, é muito freqüente se encontrar na literatura referências a "transformadas $\mathcal{Z}$ de funções". Inclusive no exemplo 3.3-B acima se calculou a "transformada $\mathcal{Z}$ da função degrau unitário". Quando utilizamos esta forma de expressão, na realidade estamos nos referindo à transformada $\mathcal{Z}$ da seqüência cujos valores correspondem aos valores da função nos instantes $t = kT$. Ou seja,

$$F(z) = \mathcal{Z}[f(t)] \quad \Rightarrow \quad F(z) = \mathcal{Z}(f_k), \qquad \text{onde} \qquad f_k = f(kT)$$

Abusando um pouco mais da linguagem, também se encontra na literatura referências a "transformadas $\mathcal{Z}$ de transformadas de Laplace". Na realidade, deve-se entender esta expressão como a "transformada $\mathcal{Z}$ da função temporal que possui esta transformada de Laplace", o que por sua vez recai no caso anterior:

$$F(z) = \mathcal{Z}[F(s)] \quad \Rightarrow \quad F(z) = \mathcal{Z}[f(t)] \qquad \text{onde} \qquad f(t) = \pounds^{-1}[F(s)]$$

A tabela C.3 do apêndice C apresenta a correspondência entre a transformada de Laplace e transformada $\mathcal{Z}$ das funções mais usuais em engenharia de controle.

3.4 A função de transferência discreta

Tomemos como exemplo a equação 3.3, que modela o método trapezoidal de integração numérica:

$$y_k = y_{k-1} + \frac{T}{2}(u_k + u_{k-1}) \tag{3.5}$$

Multiplicando-se os dois lados por z^{-k} e fazendo-se um somatório de $k = 0$ até $k = \infty$:

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} y_k z^{-k}}_{A} = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} y_{k-1} z^{-k}}_{B} + \frac{T}{2}\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} u_k z^{-k}}_{C} + \frac{T}{2}\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} u_{k-1} z^{-k}}_{D} \tag{3.6}$$

Os termos A e C da equação 3.6 são as transformadas $\mathcal{Z}$ de y_k e u_k, respectivamente. Quanto ao termo B, fazendo-se $j = k - 1$ tem-se:

$$\sum_{k=0}^{\infty} y_{k-1} z^{-k} = \sum_{j=-1}^{\infty} y_j z^{-(j+1)} = y_{-1} + \sum_{j=0}^{\infty} y_j z^{-j} z^{-1}$$

Supondo-se que o sinal é nulo para instantes anteriores a $k = 0$, $y_{-1} = 0$, o que implica:

$$\sum_{k=0}^{\infty} y_{k-1} z^{-k} = z^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} y_j z^{-j} = z^{-1} Y(z)$$

Um procedimento similar pode ser adotado para o termo D da equação 3.6:

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_{k-1} z^{-k} = z^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} u_j z^{-j} = z^{-1} U(z)$$

Com isso, a equação 3.6 pode ser reescrita como:

$$Y(z) = z^{-1} Y(z) + \frac{T}{2}[U(z) + z^{-1} U(z)] \quad \Rightarrow \quad G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \left(\frac{T}{2}\right) \frac{z+1}{z-1} \tag{3.7}$$

Portanto, um eventual sistema que fosse descrito pela equação de diferenças da equação 3.5 também poderia ser descrito pela função de transferência discreta da equação 3.7, desde que as condições iniciais fossem nulas. Esta relação entre funções de transferência discretas e equações de diferenças é análoga à relação entre funções de transferência contínuas e equações diferenciais.

Exemplo 3.4-A:

Para condições iniciais nulas, ou seja, supondo todos os sinais iguais a zero para $k < 0$, determine a função de transferência discreta do sistema descrito pela equação de diferenças:

$$y_k + 2y_{k-1} + 1.5y_{k-2} = u_{k-1} - 0.5u_{k-2}$$

Pelas propriedades da homogeneidade, da aditividade e do atraso no tempo da transformada $\mathcal{Z}$, listadas no apêndice C, sabe-se que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}(y_k + 2y_{k-1} + 1.5y_{k-2}) &= \mathcal{Z}(u_{k-1} - 0.5u_{k-2}) \quad \Rightarrow \\
\mathcal{Z}(y_k) + 2\mathcal{Z}(y_{k-1}) + 1.5\mathcal{Z}(y_{k-2}) &= \mathcal{Z}(u_{k-1}) - 0.5\mathcal{Z}(u_{k-2}) \quad \Rightarrow \\
Y(z) + 2z^{-1}Y(z) + 1.5z^{-2}Y(z) &= z^{-1}U(z) - 0.5z^{-2}U(z) \quad \Rightarrow \\
[1 + 2z^{-1} + 1.5z^{-2}]Y(z) &= [z^{-1} - 0.5z^{-2}]U(z) \quad \Rightarrow \\
G(z) = \frac{Y(z)}{G(z)} &= \frac{z^{-1} - 0.5z^{-2}}{1 + 2z^{-1} + 1.5z^{-2}} = \frac{z - 0.5}{z^2 + 2z + 1.5}
\end{aligned}$$

Estabelecendo um paralelo com funções de transferência contínuas, da mesma forma que uma diferenciação "equivale" a uma multiplicação por s, um deslocamento para trás no tempo "equivale" a uma multiplicação por z^{-1}. ■

A função de transferência discreta $G(z)$ de um sistema é uma expressão em z tal que $Y(z) = G(z)U(z)$, onde $U(z)$ é a transformada $\mathcal{Z}$ do sinal de entrada u_k e $Y(z)$ é a transformada $\mathcal{Z}$ do sinal de saída y_k. Sabe-se que a transformada $\mathcal{Z}$ da função pulso unitário δ_k é $\Delta(z) = 1$. Por esta razão, pode-se concluir que, excitando-se um sistema com uma entrada pulso unitário, a transformada $\mathcal{Z}$ do sinal de saída obtido é a própria função de transferência discreta do sistema:

$$u_k = \delta_k \quad \Rightarrow \quad U(z) = 1 \quad \Rightarrow \quad Y(z) = G(z)U(z) = G(z) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{Z}(y_k) = G(z)$$

Exemplo 3.4-B:

Comprove o resultado obtido anteriormente de que a equação de diferenças da equação 3.5 e a função de transferência discreta da equação 3.7 são equivalentes, usando a propriedade de excitação do sistema por um pulso unitário. Suponha $y_k = 0$ para $k < 0$.

$$u_k = \delta_k \quad \Rightarrow \quad u_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

Da equação 3.5:

$$\begin{aligned} y_k = y_{k-1} + \frac{T}{2}(u_k + u_{k-1}) \quad \Rightarrow \quad & y_0 = y_{-1} + \frac{T}{2}(u_0 + u_{-1}) = 0 + \frac{T}{2}(1+0) = \frac{T}{2} \quad \Rightarrow \\ & y_1 = y_0 + \frac{T}{2}(u_1 + u_0) = \frac{T}{2} + \frac{T}{2}(0+1) = T \quad \Rightarrow \\ & y_2 = y_1 + \frac{T}{2}(u_2 + u_1) = T + \frac{T}{2}(0+0) = T \quad \Rightarrow \\ & y_3 = y_4 = y_5 = \cdots = T \end{aligned}$$

Com base na definição da transformada $\mathcal{Z}$ da equação 3.4:

$$\begin{aligned} G(z) = \mathcal{Z}(y_k) &= \sum_{k=0}^{\infty} y_k z^{-k} = \frac{T}{2} + Tz^{-1} + Tz^{-2} + \cdots = -\frac{T}{2} + T + Tz^{-1} + Tz^{-2} + \cdots = \\ &= -\frac{T}{2} + T\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = -\frac{T}{2} + \frac{T}{1 - z^{-1}} = -\frac{T}{2} + \frac{Tz}{z-1} = \left(\frac{T}{2}\right)\frac{z+1}{z-1} \end{aligned}$$

Conforme esperado, o resultado é idêntico ao da equação 3.7. ■

3.5 Sistemas amostrados

Um *sistema de controle digital* utiliza sinais digitais e um computador digital para controlar um processo. Um computador digital recebe e manipula sinais na forma digital (ou numérica), em contraste com sinais contínuos. Isto faz com que, apesar de o processo sob controle ser contínuo, o controlador só tem acesso a dados do processo e só pode atuar sobre ele em determinados instantes de tempo pré-estabelecidos. Dados obtidos sobre as variáveis do processo apenas a intervalos discretos de tempo são denominados *dados* *amostrados*, e constituem um *sinal discreto*. O período T entre dois instantes consecutivos de obtenção dos dados é denominado *período de amostragem*.

Um diagrama de blocos de um sistema de controle digital monovariável é mostrado na figura 3.2. O computador digital neste sistema recebe o erro na forma digital e realiza cálculos de forma a fornecer uma saída, também na forma digital. O computador deve ser programado para fornecer uma saída tal que o desempenho do processo corresponda ao desempenho desejado. Muitos computadores são capazes de receber e tratar várias entradas, o que permite a existência de sistemas de controle multivariáveis baseados em um único computador.

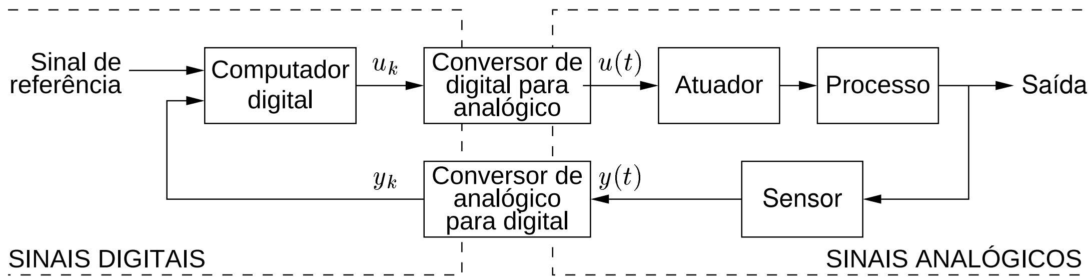


Figura 3.2: Diagrama de blocos típico de um sistema de controle digital

Os dados da medição são convertidos da forma analógica para a forma digital por um conversor de analógico para digital, ou conversor AD, mostrado na figura 3.2. Após processar as entradas, o computador fornece uma saída na forma digital, que é então convertida para a forma analógica por um conversor de digital para analógico, ou conversor DA, também mostrado na figura 3.2.

Na entrada do sistema digital (ou seja, logo após o conversor AD), o computador recebe uma seqüência de valores representando os valores do sinal de saída $y(t)$ nos instantes de tempo $t = kT$, $k = 0, 1, 2, \cdots$, conforme indicado na figura 3.3:

$$y(t) \xrightarrow{\text{AD}} y_k$$

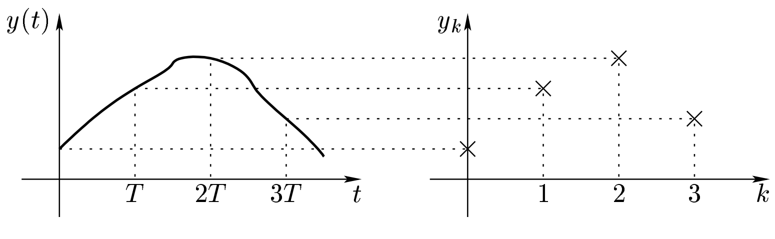


Figura 3.3: Funcionamento típico de um conversor AD

O funcionamento do conversor DA é um pouco mais complexo. O conversor DA recebe a cada T segundos um valor numérico digital do computador e gera (instantaneamente, para um conversor ideal) um sinal analógico proporcional a este valor, geralmente sob a forma de uma tensão elétrica:

$$u_k \xrightarrow{\text{DA}} u(t)$$

Entre os instantes de amostragem, entretanto, o conversor não recebe do computador nenhuma informação sobre o valor analógico a ser fornecido, cabendo ao próprio conversor gerar este valor de forma autônoma. A maioria dos conversores DA mantém constante a saída com o último valor recebido. Este comportamento, indicado na figura 3.4, é conhecido como *segurador de ordem zero*:

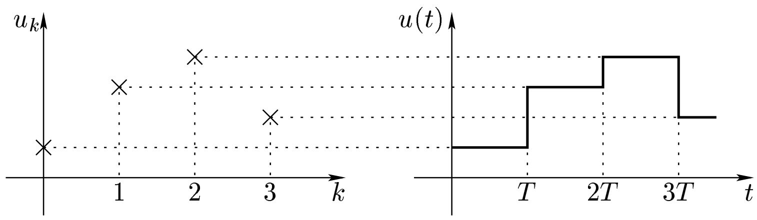


Figura 3.4: Funcionamento típico de um conversor DA

Para modelar o comportamento do conversor DA, usualmente se divide o seu funcionamento em duas entidades que, embora não existam fisicamente como dispositivos separados, juntas modelam o comportamento do conversor:

- amostrador; e
- segurador.

3.5.1 Amostrador

A função impulso unitário[1] $\delta(t)$ é definida como:

$$\delta(t) = \lim_{h \to 0} \Delta(t), \qquad \text{onde} \quad \Delta(t) = \begin{cases} 1/h, & 0 \leq t < h \\ 0, & t \geq h \text{ ou } t < 0 \end{cases}$$

A integral de $\delta(t)$ é um degrau unitário, conforme indicado na figura 3.5.

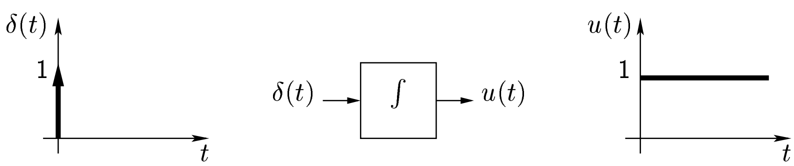


Figura 3.5: Relação de integração entre as funções impulso unitário e degrau unitário

[1]Não confundir a função impulso unitário $\delta(t)$, que é contínua, com a função pulso unitário δ_k, que é discreta e foi apresentada no exemplo 3.3-A.

Um amostrador seria um dispositivo que recebesse na entrada uma seqüência de valores u_k e gerasse na saída um sinal $\overset{*}{u}(t)$, formado por um trem de impulsos de periodicidade T com cada impulso multiplicado pelo valor correspondente na seqüência, conforme indicado na figura 3.6.

$$\overset{*}{u}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \delta(t - kT)$$

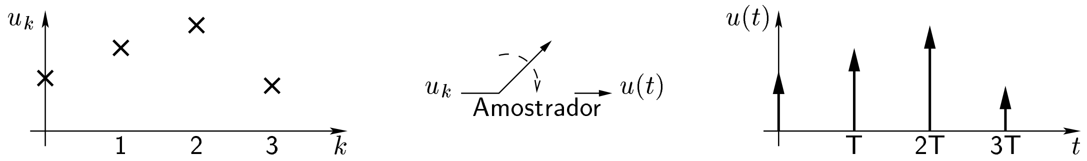


Figura 3.6: Princípio de funcionamento de um amostrador

3.5.2 Segurador

Um segurador de ordem zero seria um dispositivo que, ao receber um impulso de magnitude α na entrada, mantivesse a saída com valor "α" durante T segundos e com valor "0" daí em diante, conforme indicado na figura 3.7. Este sinal de saída desejado pode ser decomposto

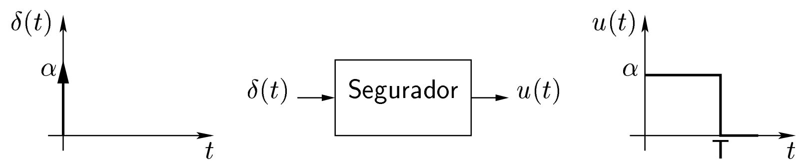


Figura 3.7: Princípio de funcionamento de um segurador de ordem zero

como a subtração de dois degraus unitários, tendo o segundo um atraso de T segundos em relação ao primeiro, conforme a figura 3.8. Como a saída de um integrador para uma

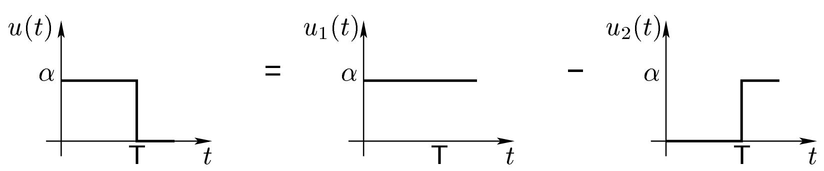


Figura 3.8: Decomposição do sinal segurado em dois degraus unitários

entrada impulso unitário é um degrau unitário, o segurador pode ser modelado por dois integradores e um atraso no tempo de T segundos, como mostra a figura 3.9. Portanto, a

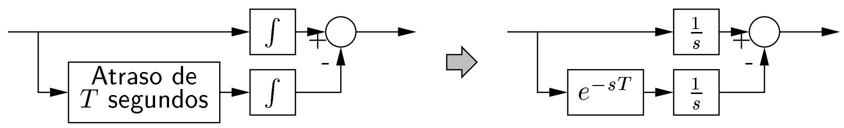


Figura 3.9: Modelagem de um dispositivo segurador de ordem zero

função de transferência do segurador de ordem zero é

$$G(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} \tag{3.8}$$

3.5.3 Conversor DA

Acoplando-se um amostrador e um segurador em série consegue-se modelar o conversor DA, como ilustra a figura 3.10. Nas plantas acionadas através de conversor DA, o conversor

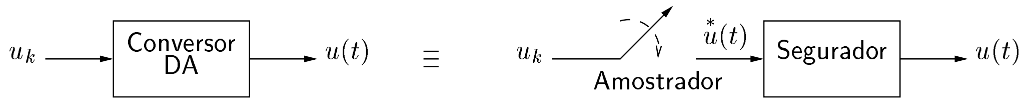


Figura 3.10: Modelagem de um conversor DA por um amostrador e um segurador em série

será decomposto em um amostrador e em um segurador e, em seguida, o segurador será incorporado à planta, restando apenas o amostrador para modelar o conversor DA. Dito de outra forma, a análise será feita supondo-se que, ao invés do sinal "real" $u(t)$ gerado pelo conversor e que é aplicado na planta "real", tem-se um trem de impulsos $\overset{*}{u}(t)$ gerado por um amostrador e que este sinal é aplicado em uma planta "virtual", composta por um segurador em série com a planta real, como indicado na figura 3.11.

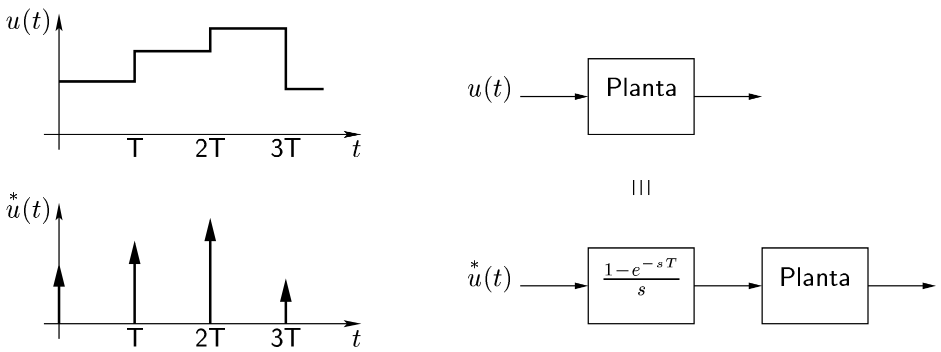


Figura 3.11: Equivalência entre sinal proveniente de conversor DA e trem de impulsos

3.6 Função de transferência discreta de sistema amostrado

Deseja-se, para um sistema amostrado como o da figura 3.2, determinar qual a função de transferência discreta que relaciona a seqüência y_k de valores lidos pelo computador com a seqüência u_k gerada pelo computador.

A função de transferência discreta de um sistema pode ser obtida aplicando-se um pulso unitário ao sistema. Portanto, o procedimento para sua obtenção seria o seguinte:

1. aplica-se na entrada do sistema a seqüência $u_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$
2. faz-se $G(z) = \mathcal{Z}(y_k)$, onde y_k é a seqüência obtida na saída do sistema.

Em razão do discutido anteriormente, aplicar um pulso unitário a um sistema amostrado é equivalente a aplicar um único impulso unitário à planta precedida de um segurador:

$$u_k = \delta_k \quad \Rightarrow \quad \overset{*}{u}(t) = \delta(t)$$

Nesta situação, se a planta tem função de transferência contínua $G(s)$, a transformada de Laplace do sinal de saída $Y(s)$ é dada por:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \left(\frac{1 - e^{-Ts}}{s}\right) G(s)\overset{*}{U}(s)$$

Como $\overset{*}{u}(t) = \delta(t) \quad \Rightarrow \quad \overset{*}{U}(s) = 1$:

$$Y(s) = \left(\frac{1 - e^{-Ts}}{s}\right) G(s) \quad \Rightarrow \quad y(t) = \pounds^{-1}[Y(s)] \quad \Rightarrow \quad y_k = y(kT)$$

A função de transferência discreta é portanto dada por:

$$G(z) = \mathcal{Z}\left[Y(s)\right] = \mathcal{Z}\left[\left(\frac{1 - e^{-Ts}}{s}\right) G(s)\right] = \mathcal{Z}\left[\frac{G(s)}{s}\right] - \mathcal{Z}\left[\frac{e^{-Ts}G(s)}{s}\right]$$

e^{-Ts} corresponde exatamente a um atraso de um período. Logo:

$$\mathcal{Z}\left[\frac{e^{-Ts}G(s)}{s}\right] = z^{-1}\mathcal{Z}\left[\frac{G(s)}{s}\right] \quad \Rightarrow$$

$$G(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{G(s)}{s}\right] = \left(\frac{z-1}{z}\right)\mathcal{Z}\left[\frac{G(s)}{s}\right] \tag{3.9}$$

Um erro bastante freqüente ao se calcular a função de transferência discreta correspondente a um sistema amostrado é se fazer $G(z) = \mathcal{Z}[G(s)]$. Pode-se utilizar uma "tabela de equivalência F(s)-F(z)", como a tabela C.3 do apêndice C, mas levando-se em conta a equação 3.9. Ou então pode-se consultar logo uma "tabela de correspondência G(s)-G(z)", como a tabela C.4 do apêndice C, que já dá diretamente a função de transferência discreta

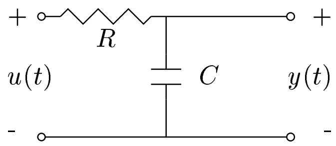


Figura 3.12: Sistema a se comparar os modelos contínuo e discreto no exemplo 3.6-A

correspondente à função de transferência contínua. Mas é importante que se tenha bastante claro o significado da tabela que se está consultando, e em qual contexto ela pode (ou não pode) ser empregada.

Exemplo 3.6-A: Comparação entre modelos contínuo e discreto de sistema
Seja o sistema modelado pelo circuito da figura 3.12, com $R = 100k\Omega$ e $C = 1\mu F$.

- Obtenha a função de transferência contínua $G(s)$ do sistema.
- Obtenha a resposta do sistema para:
  1. entrada degrau unitário; e
  2. entrada rampa unitária.
- Obtenha a função de transferência discreta do sistema, supondo um período de amostragem de $T = 30ms$.
- Obtenha a resposta amostrada do sistema para:
  1. entrada degrau unitário; e
  2. entrada rampa unitária.
- Compare os valores obtidos fazendo-se $k = 1, 2, 3, \cdots$ nas soluções encontradas para o sistema amostrado com os valores obtidos fazendo-se $t = 0.03, 0.06, 0.09, \cdots$ nas soluções para o sistema contínuo. Os valores são iguais ou diferentes? Porquê?

Como se trata de um divisor de tensão:

$$Y(s) = \frac{Z_C(s)}{Z_R(s) + Z_C(s)} U(s) \quad \Rightarrow \quad G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{10^6}{s}}{10^5 + \frac{10^6}{s}} = \frac{10}{s+10}$$

Para uma entrada degrau unitário:

$$U(s) = \frac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad Y(s) = \frac{10}{s(s+10)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+10} \quad \Rightarrow \quad y(t) = 1 - e^{-10t} \tag{3.10}$$

Para uma entrada rampa unitária:

$$U(s) = \frac{1}{s^2} \quad \Rightarrow \quad Y(s) = \frac{10}{s^2(s+10)} = \frac{1}{s^2} - \frac{0.1}{s} + \frac{0.1}{s+10} \quad \Rightarrow$$
$$y(t) = t - 0.1 + 0.1e^{-10t} \tag{3.11}$$

A obtenção da função de transferência discreta é feita a partir da equação 3.9 e da tabela C.3:

$$\frac{G(s)}{s} = \frac{10}{s(s+10)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+10} \quad \Rightarrow$$

$$\mathcal{Z}\left[\frac{G(s)}{s}\right] = \mathcal{Z}\left(\frac{1}{s}\right) - \mathcal{Z}\left(\frac{1}{s+10}\right) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-0.3}} = \frac{0.26z}{(z-1)(z-0.74)} \quad \Rightarrow$$

$$G(z) = \left(\frac{z-1}{z}\right)\mathcal{Z}\left[\frac{G(s)}{s}\right] = \frac{0.26}{z-0.74} \tag{3.12}$$

A obtenção de $G(z)$ também poderia ser feita diretamente por consulta à tabela C.4.

Para uma entrada degrau unitário no sistema amostrado, a tabela C.3 mostra que:

$$U(z) = \frac{z}{z-1} \quad \Rightarrow \quad Y(z) = G(z)U(z) = \frac{0.26z}{(z-1)(z-0.74)} = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-0.74} \quad \Rightarrow$$

$$y_k = 1 - e^{-10Tk} = 1 - e^{-0.3k} \tag{3.13}$$

A figura 3.13 apresenta simultaneamente o gráfico do sinal de saída do sistema contínuo, traçado a partir da equação 3.10, e os valores fornecidos pelo sistema amostrado nos instantes de amostragem, calculados a partir da equação 3.13. Há coincidência, nos instantes de amostragem, do sinal de saída do sistema contínuo e do amostrado para entrada degrau.

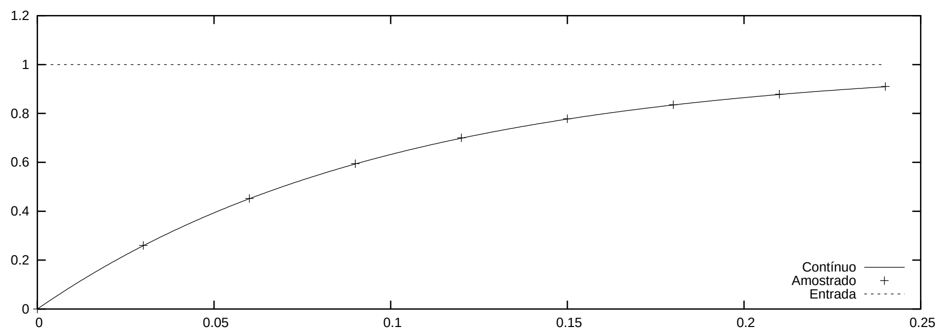


Figura 3.13: Resposta ao degrau contínua e amostrada do sistema da figura 3.12

Para uma entrada rampa unitária no sistema amostrado, a tabela C.3 diz que:

$$U(z) = \frac{0.03z}{(z-1)^2} \quad \Rightarrow \quad Y(z) = \frac{0.0078z}{(z-1)^2(z-0.74)} = \frac{0.03z}{(z-1)^2} - \frac{0.116z}{z-1} + \frac{0.116z}{z-0.74} \quad \Rightarrow$$

$$y_k = Tk - 0.116 + 0.116 \cdot e^{-10Tk} = 0.03k - 0.116 + 0.116 \cdot e^{-0.3k} \tag{3.14}$$

A figura 3.14 apresenta simultaneamente o gráfico do sinal de saída do sistema contínuo, traçado a partir da equação 3.11, e os valores fornecidos pelo sistema amostrado nos instantes de amostragem, calculados a partir da equação 3.14. Nota-se que não há coincidência entre os valores do sinal de saída para o sistema contínuo e para o sistema amostrado.

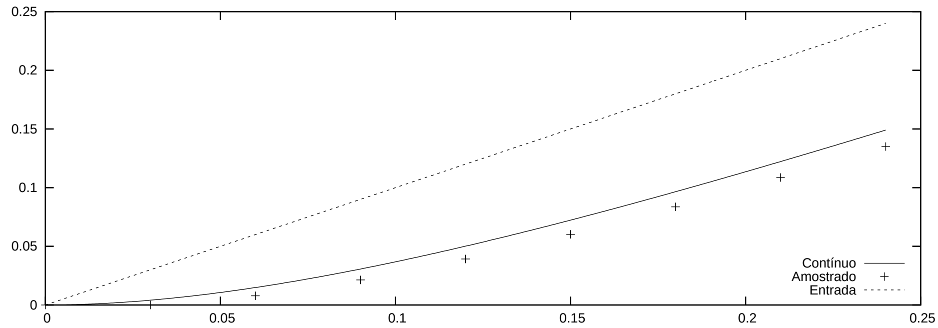


Figura 3.14: Resposta à rampa contínua e amostrada do sistema da figura 3.12

Nota-se que há uma diferença entre o comportamento para uma entrada degrau, exibido na figura 3.13, e para uma entrada rampa, exibido na figura 3.14. Na primeira situação, a planta não apresentou mudança de comportamento ao se amostrar o sinal de entrada, enquanto que na segunda situação o comportamento foi diferente. Isto se deve ao fato de um degrau unitário atravessar sem alterações um conversor DA, o que já não acontece com entradas variáveis no tempo, como uma entrada rampa. A figura 3.15 ilustra este fato.

Figura 3.15: Influência do conversor DA sobre entradas degrau e rampa

Para o cálculo dos valores do sinal de saída do sistema amostrado, foi utilizado o procedimento de se calcular a anti-transformada $\mathcal{Z}$ do sinal, a partir da função de transferência. Outra possibilidade é se calcular numericamente estes valores, o que é bastante fácil de ser feito a partir da equação de diferenças do modelo. Da equação 3.12:

$$G(z) = \frac{0.26}{z - 0.74} \quad \Rightarrow \quad y_k - 0.74y_{k-1} = 0.26u_{k-1} \tag{3.15}$$

Com esta equação de diferenças o sinal de saída pode ser calculado recursivamente para cada valor de k, dando os resultados indicados na tabela 3.1. Os valores da tabela 3.1, calculados numericamente a partir da equação de diferenças 3.15, coincidem com os valores obtidos fazendo-se $k = 0, 1, \cdots, 6, 7$ nas equações 3.13 e 3.14 ■

3.7 Características dos sistemas amostrados

Sistemas lineares contínuos invariantes no tempo têm a propriedade que a resposta em regime a excitações senoidais também é senoidal, com a freqüência do sinal de excitação.

k	$u_k = 1$	y_k	$u_k = Tk$	y_k
0	1.00	0.0000	0.00	0.0000
1	1.00	0.2592	0.03	0.0000
2	1.00	0.4512	0.06	0.0078
3	1.00	0.5934	0.09	0.0213
4	1.00	0.6988	0.12	0.0391
5	1.00	0.7769	0.15	0.0601
6	1.00	0.8347	0.18	0.0834
7	1.00	0.8775	0.21	0.1085

Tabela 3.1: Cálculo recursivo dos valores do sinal de saída do exemplo 3.6-A

Sistemas amostrados, entretanto, comportam-se de uma maneira mais complicada, pois a amostragem cria sinais com novas freqüências. Este fenômeno é conhecido como *mascaramento* ou *aliasing*.

Para ilustrar o fenômeno do mascaramento, vamos supor que um sistema amostrado seja excitado com um sinal senoidal de entrada de freqüência $\omega = 12$, ou seja, $u(t) = \sin(12t)$. O período de amostragem é de $T = 0.5s$, o que faz com a freqüência de amostragem seja de $\omega_s = 2\pi/T = 12.57$. A figura 3.16 apresenta no primeiro gráfico o sinal de entrada contínuo, onde estão superpostos os valores lidos nos instantes de amostragem, e no segundo gráfico a maneira como estes valores lidos são percebidos após a amostragem.

Nota-se claramente que a amostragem fez surgir um sinal com uma nova freqüência. Sem entrar em maiores detalhes desta teoria, apenas mencionaremos que um sinal de freqüência ω, ao ser amostrado com uma freqüência ω_s, pode gerar componentes com freqüências ω_a dadas por

$$\omega_a = n\omega_s \pm \omega, \qquad \text{onde } n = 0, 1, 2, \cdots \tag{3.16}$$

No nosso exemplo, a amostragem criou uma componente de sinal com freqüência $\omega_a = 12.57 - 12 = 0.57$rad/s. O período deste sinal é portanto de 11s, conforme se vê claramente no segundo gráfico da figura 3.16.

Uma conseqüência da equação 3.16 é que o processo de amostragem criará componentes de baixa freqüência se o sinal a ser amostrado contiver freqüências maiores que a metade da freqüência de amostragem. A freqüência $\omega_N = \omega_s/2$ é chamada de *freqüência de Nyquist* e é um parâmetro importante de sistemas amostrados. A justificativa teórica deste fato vem do *teorema da amostragem de Shannon*, que estabelece que um sinal contínuo que não possua componentes de freqüência superiores a ω_0 pode ser reconstituído a partir de suas amostras se a freqüência de amostragem for superior a $2\omega_0$.

Para evitar as dificuldades ilustradas na figura 3.16, é essencial que todas as componentes de sinal com freqüências maiores que a freqüência de Nyquist sejam removidas antes que o sinal seja amostrado, através da utilização de filtros. Os filtros que reduzem os componentes de alta freqüência dos sinais são chamados de *filtros anti-mascaramento*,

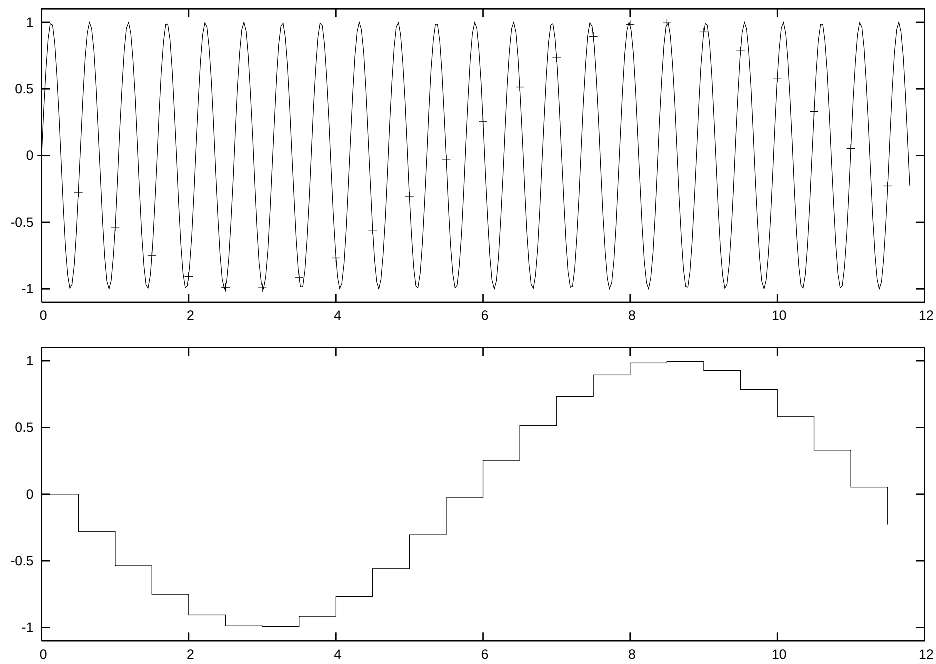


Figura 3.16: Exemplo do efeito de mascaramento em sistemas amostrados

e são componentes importantes de sistemas de controle controlados por computador ou de qualquer outro sistema amostrado.

Principalmente em razão do fenômeno do mascaramento, a escolha correta da taxa de amostragem é um aspecto muito importante em sistemas amostrados. Aumentar muito o período tornará impossível reconstruir o sinal contínuo. Diminuir muito o período aumentará a carga computacional do computador e acentuará os erros numéricos.

Em engenharia de controle, é usual se relacionar o período de amostragem com grandezas temporais do sistema. Para sistemas oscilatórios, é normal relacioná-lo com o período da oscilação do sinal de saída; para sistemas não-oscilatórios, com o tempo de subida, que é o tempo necessário para que o sinal de saída atinja um percentual (geralmente 95%) do valor de regime. A experiência mostra que, para a maioria dos sistemas, bons resultados são obtidos adotando-se um período de amostragem igual à grandeza temporal aplicável (período da oscilação ou tempo de subida) dividida por um fator entre 4 e 10.

3.8 Modelos discretos no espaço de estados

Seja o sistema descrito pelo modelo contínuo no espaço de estados

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathsf{A}\mathbf{x} + \mathsf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathsf{C}\mathbf{x} + \mathsf{D}\mathbf{u} \end{cases} \tag{3.17}$$

A situação mais comum em sistemas amostrados é aquela em que o conversor DA se baseia em um segurador de ordem zero, ou seja, o conversor mantém o sinal analógico constante até que uma nova conversão seja solicitada. Portanto, se denominarmos $t_k = kT$ o k-ésimo instante de amostragem, o sinal de entrada $u(t)$ é constante e igual a u_k para o período de tempo até o próximo instante de amostragem. Durante este período $t_k \leq t < t_{k+1}$, com base na equação 2.35, o vetor de estado $\mathbf{x}(t)$ é dado por:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t - t_k)\mathbf{x}(t_k) + \int_{t_k}^{t} \Phi(t-\tau)\mathsf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau, \qquad t_k \leq t < t_{k+1}$$

Como $\mathbf{u}(t)$ é constante no intervalo:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t - t_k)\mathbf{x}(t_k) + \int_{t_k}^{t} \Phi(t-\tau)d\tau\mathsf{B}\mathbf{u}(t_k), \qquad t_k \leq t < t_{k+1}$$

Fazendo $\sigma = t - \tau$, o que implica $\tau = t - \sigma$ e $d\tau = -d\sigma$:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t - t_k)\mathbf{x}(t_k) + \int_{t-t_k}^{0} \Phi(\sigma)(-d\sigma)\mathsf{B}\mathbf{u}(t_k) = \Phi(t - t_k)\mathbf{x}(t_k) + \int_{0}^{t-t_k} \Phi(\sigma)d\sigma\mathsf{B}\mathbf{u}(t_k)$$

Para o próximo período de amostragem, onde $t = t_{k+1}$:

$$\mathbf{x}(t_{k+1}) = \Phi(t_{k+1} - t_k)\mathbf{x}(t_k) + \int_{0}^{t_{k+1}-t_k} \Phi(\sigma)d\sigma\mathsf{B}\mathbf{u}(t_k)$$

Se os instantes de amostragem são periódicos, de forma que $t_{k+1} - t_k = T$, então:

$$\mathbf{x}(t_{k+1}) = \Phi(T)\mathbf{x}(t_k) + \int_{0}^{T} \Phi(\sigma)d\sigma\mathsf{B}\mathbf{u}(t_k)$$

ou, em uma notação mais compacta:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \bar{\mathsf{A}}\mathbf{x}_k + \bar{\mathsf{B}}\mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k = \mathsf{C}\mathbf{x}_k + \mathsf{D}\mathbf{u}_k \end{cases} \qquad \text{onde} \qquad \begin{array}{l} \bar{\mathsf{A}} = \Phi(T) = e^{AT} \\ \bar{\mathsf{B}} = \displaystyle\int_0^T \Phi(\sigma)d\sigma\mathsf{B} = \int_0^T e^{\mathsf{A}\sigma}d\sigma\mathsf{B} \end{array} \tag{3.18}$$

As matrizes $\bar{\mathsf{A}}$ e $\bar{\mathsf{B}}$ podem ser determinadas pelas equações 3.18, utilizando o teorema de Cayley-Hamilton do apêndice B, conforme ilustra o exemplo 3.8-A a seguir.

Exemplo 3.8-A: Discretização de modelo contínuo no espaço de estados

Com um período de amostragem T, calcule um modelo discreto no espaço de estados correspondente ao sistema descrito pelo modelo contínuo:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} \end{cases} \tag{3.19}$$

Vamos utilizar o teorema de Cayley-Hamilton para determinação das matrizes $\bar{\mathsf{A}}$ e $\bar{\mathsf{B}}$. A equação característica da matriz A é:

$$\det(\lambda\mathsf{I} - \mathsf{A}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm j$$

A determinação das matrizes $\bar{\mathsf{A}}$ e $\bar{\mathsf{B}}$ envolve o cálculo de duas funções matriciais f e g:

$$\begin{aligned} \bar{\mathsf{A}} &= f(\mathsf{A}) = e^{\mathsf{A}T} = a_1\mathsf{A} + a_2\mathsf{I} && \Rightarrow \quad f(\lambda) = e^{\lambda T} \\ \bar{\mathsf{B}} &= g(\mathsf{A})\mathsf{B} = \int_0^T e^{\mathsf{A}\sigma} d\sigma \cdot \mathsf{B} = (b_1\mathsf{A} + b_2\mathsf{I})\mathsf{B} && \Rightarrow \quad g(\lambda) = \int_0^T e^{\lambda\sigma} d\sigma = \frac{1}{\lambda}\left(e^{\lambda T} - 1\right) \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} a_1 j + a_2 = f(j) = e^{jT} \\ a_1(-j) + a_2 = f(-j) = e^{-jT} \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1 = \dfrac{e^{jT} - e^{-jT}}{2j} = \sin T \\ a_2 = \dfrac{e^{jT} + e^{-jT}}{2} = \cos T \end{array} \right.$$

$$\bar{\mathsf{A}} = a_1\mathsf{A} + a_2\mathsf{I} = \sin T \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \cos T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos T & \sin T \\ -\sin T & \cos T \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} b_1 j + b_2 = g(j) = \dfrac{1}{j}\left(e^{jT} - 1\right) \\ b_1(-j) + b_2 = g(-j) = -\dfrac{1}{j}\left(e^{-jT} - 1\right) \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} b_1 = 1 - \dfrac{e^{jT} + e^{-jT}}{2} = 1 - \cos T \\ b_2 = \dfrac{e^{jT} - e^{-jT}}{2j} = \sin T \end{array} \right.$$

$$\bar{\mathsf{B}} = (b_1\mathsf{A} + b_2\mathsf{I})\mathsf{B} = \left((1 - \cos T)\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \sin T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \cos T \\ \sin T \end{bmatrix}$$

O modelo discreto correspondente é portanto:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} \cos T & \sin T \\ -\sin T & \cos T \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 1 - \cos T \\ \sin T \end{bmatrix} \mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k \end{array} \right. \tag{3.20}$$

É de se notar que, para todo período de amostragem $T = T_0 + 2\pi k,\ k = 0, 1, 2, \cdots$, o modelo discreto é o mesmo. Ou seja, diferentes sistemas amostrados podem ter a mesma representação discreta, em razão do fenômeno de mascaramento. ■

As duas matrizes $\bar{\mathsf{A}}$ e $\bar{\mathsf{B}}$ podem ser determinadas calculando-se uma única função exponencial matricial de uma matriz de ordem maior. Da equação 3.18:

$$\bar{\mathsf{A}}(t) = e^{At} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\bar{\mathsf{A}}(t)}{dt} = \bar{\mathsf{A}}(t)\mathsf{A} \tag{3.21}$$

$$\bar{\mathsf{B}}(t) = \int_0^t e^{\mathsf{A}\sigma} d\sigma \mathsf{B} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\bar{\mathsf{B}}(t)}{dt} = \bar{\mathsf{A}}(t)\mathsf{B} \tag{3.22}$$

Se definirmos as matrizes:

$$\Gamma(t) = \begin{bmatrix} \bar{\mathsf{A}}(t) & \bar{\mathsf{B}}(t) \\ 0 & \mathsf{I} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Delta = \begin{bmatrix} \mathsf{A} & \mathsf{B} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

então, das equações 3.21 e 3.22:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \bar{\mathsf{A}} & \bar{\mathsf{B}} \\ 0 & \mathsf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathsf{A}} & \bar{\mathsf{B}} \\ 0 & \mathsf{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathsf{A} & \mathsf{B} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\Gamma}{dt} = \Gamma \cdot \Delta \quad \Rightarrow \quad \Gamma(t) = e^{\Delta t}$$

Portanto, para se calcular $\bar{\mathsf{A}}(T)$ e $\bar{\mathsf{B}}(T)$, basta que se calcule a matriz:

$$\Gamma(T) = e^{\Delta T} \tag{3.23}$$

As matrizes $\bar{\mathsf{A}}$ e $\bar{\mathsf{B}}$ também podem ser calculadas numericamente por truncagem de uma série infinita:

$$\Psi = \int_0^T e^{\mathsf{A}\sigma} d\sigma = \mathsf{I}T + \frac{\mathsf{A}T^2}{2!} + \frac{\mathsf{A}^2T^3}{3!} + \cdots + \frac{\mathsf{A}^{i-1}T^i}{i!} + \cdots \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \bar{\mathsf{A}} = \mathsf{I} + \mathsf{A}\Psi \\ \bar{\mathsf{B}} = \Psi\mathsf{B} \end{cases}$$

3.8.1 O inverso da amostragem

Amostrar um sistema mapea um sistema contínuo, como na equação 3.19, para um sistema discreto, como em 3.20. Uma questão natural é saber se e como é possível fazer o caminho inverso, ou seja, obter o sistema contínuo correspondente a um sistema discreto.

Da equação 3.23, segue-se que

$$\Delta = \begin{bmatrix} \mathsf{A} & \mathsf{B} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{T} \ln \begin{bmatrix} \bar{\mathsf{A}} & \bar{\mathsf{B}} \\ 0 & \mathsf{I} \end{bmatrix} = \frac{1}{T} \ln \Gamma$$

onde $\ln(\cdot)$ é a função logaritmo matricial. O sistema contínua pode portanto ser determinado tomando-se o o logaritmo da matriz $\Gamma = \left[\begin{smallmatrix} \bar{\mathsf{A}} & \bar{\mathsf{B}} \\ 0 & \mathsf{I} \end{smallmatrix}\right]$.

Como o fenômeno do mascaramento faz com que diferentes sistemas contínuos possam ter a mesma representação discreta ao serem amostrados, a operação de "desamostragem" não é inequívoca, pois existe também uma não-unicidade da função logaritmo matricial, como ilustra o exemplo 3.8-B.

Exemplo 3.8-B:

Para um período de amostragem $T = 0.1s$, o sistema da equação 3.20 é dado por:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0.995 & 0.0998 \\ -0.0998 & 0.995 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0.005 \\ 0.0998 \end{bmatrix} \mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k \end{cases} \tag{3.24}$$

Determine o sistema contínuo correspondente, verificando se o resultado obtido equivale ao sistema contínuo original, indicado na equação 3.19.

A matriz Γ é dada por:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \bar{\mathsf{A}} & \bar{\mathsf{B}} \\ 0 & \mathsf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.995 & 0.0998 & 0.005 \\ -0.0998 & 0.995 & 0.0998 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

cujos autovalores são:

$$\lambda_{1,2} = 0.995 \pm 0.0998j \qquad \lambda_3 = 1$$

Usando o teorema de Cayley-Hamilton,

$$f(\Gamma) = \ln(\Gamma) = a_1\Gamma^2 + a_2\Gamma + a_3\mathsf{I}$$

Tendo em vista que $e^{jx} = \sin x + j\cos x$, todo número complexo $a + jb$ pode ser escrito como $Me^{j\theta}$, onde $M = \sqrt{a^2+b^2}$ e $\theta = \tan^{-1}(b/a) \pm 2\pi k$. Portanto,

$$\begin{aligned} \ln(a+jb) &= \ln(Me^{j\theta}) = \ln(M) + \ln(e^{j\theta}) = \ln(M) + j\theta \\ &= \ln(\sqrt{a^2+b^2}) + j\left[\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) \pm 2\pi k\right], \quad k = 0, 1, 2, \cdots \end{aligned}$$

$$\begin{matrix} f(\lambda_1) = \ln(0.995 + 0.0998j) = j(0.1 + 2\pi k_1) & & a_1\lambda_1^2 + a_2\lambda_1 + a_3 = f(\lambda_1) \\ f(\lambda_2) = \ln(0.995 - 0.0998j) = -j(0.1 + 2\pi k_2) & \Rightarrow & a_1\lambda_2^2 + a_2\lambda_2 + a_3 = f(\lambda_2) \\ f(\lambda_3) = \ln(1) = j2\pi k_3 & & a_1\lambda_3^2 + a_2\lambda_3 + a_3 = f(\lambda_3) \end{matrix}$$

Este sistema tem infinitas soluções. Fazendo-se $k_1 = k_2 = k_3 = 0$:

$$\begin{cases} a_1 = -0.5008 \\ a_2 = 1.9983 \\ a_3 = -1.4975 \end{cases} \Rightarrow \quad \ln\Gamma = a_1\Gamma^2 + a_2\Gamma + a_3\mathsf{I} = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0 \\ -0.1 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Com isso:

$$\Delta = \begin{bmatrix} \mathsf{A} & \mathsf{B} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{\ln\Gamma}{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mathsf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathsf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

o que corresponde exatamente ao sistema da equação 3.19.

Se adotarmos valores de $k_1 = k_2 = 1$ e $k_3 = 0$, entretanto:

$$\begin{cases} a_1 = -31.9692 \\ a_2 = 127.5573 \\ a_3 = -95.5881 \end{cases} \Rightarrow \quad \ln\Gamma = a_1\Gamma^2 + a_2\Gamma + a_3\mathsf{I} = \begin{bmatrix} 0 & 6.3832 & 0 \\ -6.3832 & 0 & 6.3832 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Com isso:

$$\Delta = \begin{bmatrix} \mathsf{A} & \mathsf{B} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{\ln\Gamma}{T} = \begin{bmatrix} 0 & 63.832 & 0 \\ -63.832 & 0 & 63.832 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mathsf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 63.832 \\ -63.832 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathsf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 63.832 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Este outro sistema contínuo, que tem autovalores em $\lambda = \pm j63.832$, também é modelado pelo sistema discreto da equação 3.24, se discretizado com $T = 0.1s$. Uma freqüência angular $\omega = 63.832$rad/s corresponde a uma freqüência de oscilação de $f = \omega/2\pi = 10.159$Hz e a um período de $t = 1/f = 0.098$s. Para um tal sistema, um período de amostragem de $T = 0.1$s é portanto claramente insuficiente, o que faz aparecer o fenômeno de mascaramento e gera o fato que este sistema, após amostragem, seja percebido de maneira idêntica ao sistema da equação 3.19. ■

3.8.2 Equivalência com funções de transferência

A função de transferência discreta $G(z)$ de um sistema é a relação entre as transformadas $\mathcal{Z}$ dos sinais de entrada e de saída, com condições iniciais nulas. A aplicação da transformada $\mathcal{Z}$ no modelo discreto da equação 3.18 para $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ leva a:

$$\begin{gathered}
\mathbf{x}_{k+1} = \bar{\mathsf{A}}\mathbf{x}_k + \bar{\mathsf{B}}\mathbf{u}_k \quad \Rightarrow \quad z\mathbf{X}(z) = \bar{\mathsf{A}}\mathbf{X}(z) + \bar{\mathsf{B}}\mathbf{U}(z) \quad \Rightarrow \\
\mathbf{X}(z) = (z\mathsf{I} - \bar{\mathsf{A}})^{-1}\bar{\mathsf{B}}\mathbf{U}(z) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{X}(z) = \Phi(z)\bar{\mathsf{B}}\mathbf{U}(z) \qquad \text{onde} \quad \Phi(z) = (z\mathsf{I} - \bar{\mathsf{A}})^{-1} \\
\mathbf{Y}(z) = \mathsf{C}\mathbf{X}(z) + \mathsf{D}\mathbf{U}(z) \quad \Rightarrow \quad Y(z) = \mathsf{C}\left[\Phi(z)\bar{\mathsf{B}}U(z)\right] + DU(z) \quad \Rightarrow \\
G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \mathsf{C}\Phi(z)\bar{\mathsf{B}} + D = \mathsf{C}(z\mathsf{I} - \bar{\mathsf{A}})^{-1}\bar{\mathsf{B}} + D
\end{gathered} \tag{3.25}$$

Note-se a semelhança entre as equações 3.25 e 2.37: a conversão de modelos no espaço de estados para funções de transferência é similar para os casos contínuos e discretos.

Exemplo 3.8-C: Cálculo de função de transferência discreta equivalente
Determine a função de transferência discreta $G(z)$ do sistema descrito pelo modelo:

$$\begin{cases}
\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}u_k \\
y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}_k
\end{cases}$$

Da equação 3.25 tem-se:

$$\Phi(z) = \left(\begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} z & -1 \\ 2 & z+3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{z^2 + 3z + 2}\begin{bmatrix} z+3 & 1 \\ -2 & z \end{bmatrix}$$

$$G(z) = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z+3 & 1 \\ -2 & z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}}{z^2 + 3z + 2} = \frac{0.5z + 2}{z^2 + 3z + 2}$$

Como esperado, o resultado é similar ao do exemplo 2.7-E. ■

Para a conversão de funções de transferência discretas para o espaço de estados, o procedimento também é similar ao caso contínuo. Em razão da representação no espaço de estados não ser única, existem infinitas possibilidades de conversão. Tradicionalmente adota-se uma das formas canônicas (controlável, observável ou de Jordan), conforme ilustra o exemplo 3.8-D a seguir.

Exemplo 3.8-D: Cálculo de modelos discretos equivalentes no espaço de estados

Para o sistema descrito pela função de transferência discreta:

$$G(z) = \frac{0.5z^3 + 3z^2 + 2.5z + 4}{z^3 + 4z^2 + 5z + 2}$$

determine modelos discretos equivalentes no espaço de estados utilizando as formas canônicas controlável, observável e de Jordan.

Fazendo-se a divisão de polinômios e a expansão em frações parciais:

$$G(z) = 0.5 + \frac{z^2 + 3}{z^3 + 4z^2 + 5z + 2} = 0.5 + \frac{z^2 + 3}{(z+1)^2(z+2)} = 0.5 + \frac{4}{(z+1)^2} - \frac{6}{z+1} + \frac{7}{z+2}$$

Os modelos discretos equivalentes no espaço de estado são:

$$\text{Forma controlável (eq. 2.40):} \quad \begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k \\ y_k = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0.5 \end{bmatrix} u_k \end{cases}$$

$$\text{Forma observável (eq. 2.41):} \quad \begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k \\ y_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0.5 \end{bmatrix} u_k \end{cases}$$

$$\text{Forma de Jordan (eq. 2.43):} \quad \begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_k \\ y_k = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 7 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0.5 \end{bmatrix} u_k \end{cases}$$

Como esperado, o resultado é similar ao do exemplo 2.7-G. ■

3.9 Relação entre pólos e zeros contínuos e discretos

Considere um sistema contínuo de n-ésima ordem descrito pelo modelo:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathsf{A}\mathbf{x} + \mathsf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathsf{C}\mathbf{x} + \mathsf{D}\mathbf{u} \end{cases}$$

Os pólos deste sistema (ou seja, as raízes do denominador de sua função de transferência) são os autovalores de A, que indicaremos por $\lambda_i(\mathsf{A})$, $i = 1, 2, \cdots, n$. A amostragem com um segurador de ordem zero deste sistema leva ao modelo discreto:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \bar{\mathsf{A}}\mathbf{x}_k + \bar{\mathsf{B}}\mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k = \mathsf{C}\mathbf{x}_k + \mathsf{D}\mathbf{u}_k \end{cases}$$

Os pólos do modelo discreto são os autovalores de $\bar{\mathsf{A}}$, que indicaremos por $\lambda_i(\bar{\mathsf{A}})$. Como $\bar{\mathsf{A}} = e^{\mathsf{A}T}$, conclui-se das propriedades das funções matriciais (veja o apêndice B) que:

$$\lambda_i(\bar{\mathsf{A}}) = e^{\lambda_i(\mathsf{A})T} \quad \Rightarrow \quad p_z = e^{p_s T} \tag{3.26}$$

onde p_z e p_s são os valores dos pólos nos planos z e s, respectivamente. Por exemplo, o semiplano esquerdo do plano s é mapeado no círculo de raio unitário no plano z, conforme indica a figura 3.17. Este mapeamento não é bijetivo, pois vários pontos no plano s são mapeados no mesmo ponto no plano z. Isto é uma justificativa teórica do fenômeno do mascaramento, ilustrado na figura 3.16. Para pólos contínuos com parte imaginária entre $+\pi/T$ e $-\pi/T$, há uma correspondência inequívoca entre pólos contínuos e discretos.

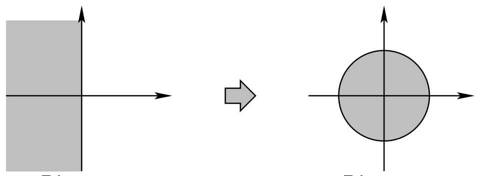


Figura 3.17: Mapeamento do semiplano esquerdo do plano s para o plano z

Ao contrário do que acontece com os pólos, não existe uma fórmula simples para o mapeamento dos zeros. Uma função de transferência contínua normalmente tem um número de zeros inferior ao número de pólos, sendo o excesso de pólos d definido como sendo a diferença entre o número de pólos (n) e de zeros. Um sistema discreto tem, via de regra, $n-1$ zeros, o que permite deduzir que, quando $d > 1$, geralmente o processo de amostragem cria zeros adicionais.

Para períodos de amostragem pequenos, um sistema contínuo com zeros em s_i gerará um sistema discreto com zeros z_i aproximadamente em

$$z_i \simeq e^{s_i T}$$

Os $d-1$ zeros adicionais tenderão para as raízes dos polinômios Z_d da tabela 3.2.

d	Z_d	zeros
1	1	—
2	$z+1$	-1
3	z^2+4z+1	-0.268, -3.732
4	$z^3+11z^2+11z+1$	-0.101, -1, -9.899
5	$z^4+26z^3+66z^2+26z+1$	-0.043, -0.431, -2.322, -23.204

Tabela 3.2: Zeros adicionais introduzidos para pequenos períodos de amostragem

Exercícios

A. Para o sinal Y(z) dado por

$$Y(z) = \frac{z}{z^2 - 3z + 2}$$

1. Sem calcular a transformada inversa, ou seja, sem calcular explicitamente uma expressão analítica para y_k, determine os valores numéricos y_k para $k = 0, 1, 2, 3, 4$ (Sugestão: use divisão infinita de polinômios e a definição da transformada $\mathcal{Z}$).
2. Calcule y_k através da transformada inversa e compare os valores numéricos calculados com os obtidos no item anterior.

B. Determine os pólos e zeros (com suas multiplicidades) do sistema:

$$y_k - 0.5y_{k-1} + y_{k-2} = 2u_{k-10} + u_{k-11}$$

C. Use a transformada $\mathcal{Z}$ para determinar a seqüência de saída da equação de diferenças:

$$y_{k+2} - 1.5y_{k+1} + 0.5y_k = u_{k+1}$$

quando u_k é um degrau unitário a partir de $k = 0$, $y_0 = 0.5$ e $y_{-1} = 1$.

D. Seja um sistema com função de transferência discreta:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{0.030z + 0.026}{z^2 - 1.65z + 0.68}$$

Determine a saída y_k do sistema para uma seqüência de entrada u_k degrau unitário.

E. Um agricultor possuia uma terra improdutiva e resolveu cultivá-la. No ano de 2000, iniciou o cultivo plantando 100 sacas de grãos. A sua fazenda tem uma produtividade tal que as sementes produzem uma safra igual a 40 vezes a quantidade de grãos plantados, no primeiro ano após o plantio, e de 60 vezes, no segundo ano. Após a segunda safra as plantas morrem. A partir de 2001, quando colheu a primeira safra, o agricultor decidiu replantar a cada ano 1% da safra total.

1. Calcule as safras de 2001 (y_0) e 2002 (y_1).
2. Obtenha uma recursão (uma equação de diferenças) válida para qualquer $k \geq 0$ que permita calcular a safra de dois anos à frente (y_{k+2}) conhecendo a safra do ano (y_k) e a do ano seguinte (y_{k+1}).
3. Calcule a função analítica $y_k = f(k)$ que permite calcular a safra para qualquer ano através do seguinte procedimento:
   - Aplique a transformada $\mathcal{Z}$ à equação de diferenças do item 2, levando em conta as condições iniciais do item 1, e calcule $Y(z)$.
   - Aplique a antitransformada $\mathcal{Z}$ a $Y(z)$ e calcule y_k
4. Com o passar dos anos, a safra cresce indefinidamente, se estabiliza ou tende a zero? Caso estabilize, em qual valor?

F. Usando um segurador de ordem zero e $T = 1$, amostre o sistema:

$$G(s) = \frac{1}{s^2(s+2)(s+3)}$$

G. Determine as equações de diferenças correspondentes aos seguintes sistemas contínuos quando a amostragem é feita com segurador de ordem zero e período de amostragem T:

$$1. \quad \frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = \frac{du}{dt} + 3u$$

$$2. \quad \frac{d^3y}{dt^3} = u$$

H. Assume-se que as equações de diferenças a seguir descrevem sistemas contínuos que foram amostrados com um segurador de ordem zero e período de amostragem T. Determine os possíveis sistemas contínuos correspondentes.

$$1. \quad y_k - 0.5y_{k-1} = 6u_{k-1}$$

$$2. \quad y_k + 0.5y_{k-1} = 6u_{k-1}$$

I. Quais dos seguintes sistemas discretos podem ser obtidos pela amostragem sem mascaramento de um sistema contínuo causal usando um segurador de ordem zero?

$$1. \quad G_1(z) = \frac{1}{z-0.8} \qquad 2. \quad G_2(z) = \frac{1}{z+0.8}$$

$$3. \quad G_3(z) = \frac{z-1}{(z+0.8)^2} \qquad 4. \quad G_4(z) = \frac{2z^2-0.7z-0.8}{z(z-0.8)}$$

J. Determine a função de transferência discreta $G(z)$ do sistema:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k \end{cases}$$

K. Determine o modelo discreto no espaço de estados correspondente ao sistema contínuo a seguir, supondo que a amostragem é feita usando um segurador de ordem zero e um período de amostragem 0.1:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{cases}$$

L. Assume-se que o modelo discreto a seguir descreve um sistema contínuo que foi amostrado com um segurador de ordem zero e período de amostragem 0.1. Determine o modelo contínuo no espaço de estados correspondente.

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} -0.5 & -1 \\ 0 & -0.3 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.7 \end{bmatrix} \mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k \end{cases}$$

M. Um procedimento de identificação demonstrou que um sistema amostrado por um segurador de ordem zero com período de amostragem T=0.1s é descrito pela seguinte função de transferência discreta:

$$G(z) = \frac{0.00484z + 0.00468}{(z-1)(z-0.905)}$$

Através de um processo inverso à amostragem, indique duas funções de transferência contínua distintas, $G_1(s)$ e $G_2(s)$, que poderiam corresponder a este mesmo sistema amostrado. $G_1(s)$ deve corresponder à função de transferência do sistema caso se tenha garantias que o período de amostragem escolhido é suficiente pequeno para que não ocorra o fenômeno do mascaramento.

N. Muitos sistemas físicos podem ser descritos pela equação de estados:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -a & b \\ c & -d \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

onde a, b, c e d são não-negativos. Deduza o modelo no espaço de estados para o sistema amostrado com um segurador de ordem zero (Sugestão: mostre primeiro que os pólos do sistema são reais).

Capítulo 4

Simulação de sistemas

4.1 Introdução

Uma vez que se dispõe de um modelo de um sistema, o interesse maior da engenharia de controle é poder analisá-lo para deduzir as características da planta e eventualmente adequá-las às especificações do projeto. Uma abordagem possível para esta análise se baseia no uso da teoria de controle para deduzir as características a partir do estudo do modelo: estes procedimentos serão detalhados nos capítulos 7 e 8.

A análise matemática, entretanto, não pode ser utilizada em todas as situações, seja porque o modelo é complexo (por exemplo, não-linear), seja porque a planta em análise precisa ser realmente interconectada com outros módulos para exibir seu comportamento efetivo. Para estes casos, existem as abordagens de simulação:

Simulação numérica: de posse de um modelo matemático do sistema, simula-se o seu comportamento em um computador digital, como se detalha na seção 4.2. A seção 4.3 apresenta alguns aplicativos bastante utilizados em engenharia de controle para análise e simulação de sistemas.

Simulação analógica: quando a simulação de uma planta precisa ser interconectada com sistemas reais, pode-se construir um sistema que é representado pelo mesmo modelo que a planta original e utilizá-lo durante as fases de teste, ao invés da planta real. A ferramenta ideal para a construção destes equivalentes, pelo menos para modelos lineares, é a computação analógica, apresentada na seção 4.4.

4.2 Simulação numérica

O procedimento para simular numericamente um sistema depende do tipo de modelo que o representa. Para os modelos discretos, não há nenhuma dificuldade em simulá-los em um computador digital. Quanto aos sistemas contínuos, o modelo mais adequado para simulação é a representação no espaço de estados.

A resposta de um sistema representado por uma equação de estado contínua pode ser obtida utilizando-se uma aproximação de tempo discreto. Adota-se um incremento de tempo $\Delta t = T$ e calcula-se os valores aproximados das variáveis de estado nos sucessivos intervalos de tempo $t = 0, T, 2T, 3T, \cdots$. Se o incremento de tempo T for suficientemente pequeno comparado com as características temporais do sistema, a resposta aproximada calculada por métodos de tempo discreto será suficientemente próxima da resposta exata.

Para o caso geral, onde os sistemas são modelados pela equação 2.31, a equação de estado é dada por:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \tag{4.1}$$

A definição básica de derivada é:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{x}(t + \Delta t) - \mathbf{x}(t)}{\Delta t} \tag{4.2}$$

Logo, pode-se utilizar esta definição de derivada da equação 4.2 e determinar o valor de $\mathbf{x}(t)$ quando t é dividido em pequenos intervalos $\Delta t = T$. Aproximando-se a derivada por:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \simeq \frac{\mathbf{x}(t + T) - \mathbf{x}(t)}{T} \tag{4.3}$$

e substituindo-se a equação 4.3 na equação 4.1, chega-se a:

$$\frac{\mathbf{x}(t + T) - \mathbf{x}(t)}{T} \simeq \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}(t + T) \simeq \mathbf{x}(t) + T\mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] \tag{4.4}$$

A equação 4.4 permite calcular o estado do sistema no instante $t + T$ a partir do estado e dos sinais de entrada no instante t. Aplicando-se esta equação de forma recorrente, consegue-se calcular o estado do sistema para qualquer instante de tempo múltiplo de T.

Para sistemas lineares e invariantes no tempo regidos pelo modelo da equação 2.32, a equação de estado assume a forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathsf{A}\mathbf{x} + \mathsf{B}\mathbf{u} \tag{4.5}$$

o que faz com que a equação 4.4 possa ser escrita como:

$$\mathbf{x}(t + T) \simeq (T\mathsf{A} + \mathsf{I})\mathbf{x}(t) + T\mathsf{B}\mathbf{u}(t) \tag{4.6}$$

Como o tempo t pode ser escrito como $t = kT$, $k = 0, 1, 2, 3, \cdots$, a equação 4.6 pode ser escrita como uma equação de recorrência:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &\simeq (T\mathsf{A} + \mathsf{I})\mathbf{x}_k + T\mathsf{B}\mathbf{u}_k \quad \Rightarrow \\ \mathbf{x}_{k+1} &\simeq \breve{\mathsf{A}}\mathbf{x}_k + \breve{\mathsf{B}}\mathbf{u}_k, \qquad \text{onde} \quad \breve{\mathsf{A}} = T\mathsf{A} + \mathsf{I} \quad \text{e} \quad \breve{\mathsf{B}} = T\mathsf{B} \end{aligned} \tag{4.7}$$

A operação de recorrência da equação 4.7, baseada no *método de Euler* da equação 4.3, é uma fórmula de cálculo sequencial bastante adequada para ser empregada em computadores digitais. Outros métodos de integração, como os populares métodos de Runge-Kutta, podem ser utilizados em substituição à equação 4.3 para se calcular a resposta temporal da equação 4.1 ou da equação 4.5.

Uma vez que se dispõe do estado do sistema nos instantes $t = kT$, a saída do sistema nesses mesmos instantes de tempo pode ser facilmente obtida, utilizando-se a equação de saída que integra os modelos dados pelas equações 2.31 ou 2.32:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] \qquad \text{ou, para sistemas lineares,} \qquad \mathbf{y}(t) = \mathsf{C}\mathbf{x}(t) + \mathsf{D}\mathbf{u}(t)$$

Exemplo 4.2-A: Simulação de sistema não-linear

O circuito retificador de meia onda da figura 4.1 contém um elemento não-linear (um diodo) que dificulta a sua análise pelas técnicas convencionais. Modele o sistema no espaço de estados e simule numericamente a saída v_o do sistema, supondo $R_1 = 0.15\Omega$, $C_1 = 100\mu F$, $R_2 = 9\Omega$, $C_2 = 10.000\mu F$ e $v_i = 9\sqrt{2}\sin(120\pi t)$.

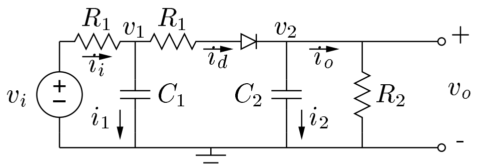


Figura 4.1: Circuito retificador de meia onda a ser simulado no exemplo 4.2-A

Adotaremos as tensões v_1 e v_2 (as tensões nos capacitores) como variáveis de estado. As equações de estado podem ser derivadas das leis de Kirchhoff:

$$\begin{cases} v_i = R_1 i_i + v_1 \\ v_1 = (R_1 + R_d) i_d + v_2 \\ v_2 = R_2 i_o \\ i_i = i_1 + i_d \\ i_d = i_2 + i_o \\ i_1 = C_1 \dot{v}_1 \\ i_2 = C_2 \dot{v}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{v}_1 = -\dfrac{R_d + 2R_1}{R_1 C_1 (R_d + R_1)} v_1 + \dfrac{1}{C_1 (R_d + R_1)} v_2 \\ \qquad + \dfrac{R_d + R_1}{R_1 C_1 (R_d + R_1)} v_i \\ \dot{v}_2 = \dfrac{1}{C_2 (R_d + R_1)} v_1 - \dfrac{R_d + R_1 + R_2}{R_2 C_2 (R_d + R_1)} v_2 \end{cases}$$

A resistência R_d do diodo é nula se o diodo está conduzindo (ou seja, se $v_1 \geq v_2$) ou é infinita se o diodo está cortado (ou seja, se $v_1 < v_2$). Com isso:

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = -\dfrac{2}{R_1 C_1} v_1 + \dfrac{1}{R_1 C_1} v_2 + \dfrac{1}{R_1 C_1} v_i \\ \dot{v}_2 = \dfrac{1}{R_1 C_2} v_1 - \dfrac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C_2} v_2 \qquad (\text{se } v_1 \geq v_2) \end{cases} \text{ou} \begin{cases} \dot{v}_1 = -\dfrac{1}{R_1 C_1} v_1 + \dfrac{1}{R_1 C_1} v_i \\ \dot{v}_2 = -\dfrac{1}{R_2 C_2} v_2 \qquad (\text{se } v_1 < v_2) \end{cases}$$

A figura 4.2 apresenta trechos de um programa em C que simula numericamente este modelo. As variáveis `x[0]` e `x[1]` correspondem, respectivamente, a v_1 e v_2. Os sinais de entrada v_i e de saída v_o são representados pelas variáveis correspondentes `u` e `y`. O vetor `dx` contém o valor retornado pela função `f`, que representa o modelo propriamente dito do sistema e que corresponde à função $f[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t]$ da equação 4.4.

O resultado da simulação numérica está indicado no gráfico da figura 4.3. Foi utilizado um passo de simulação de $T = 1 \times 10^{-6}$ segundos, sendo plotado um ponto a cada 200 pontos calculados. O comportamento do sinal de saída simulado corresponde àquilo que se espera de um retificador: quando o sinal de entrada é inferior à tensão gerada pela carga acumulada no capacitor C_2, o diodo abre e o resistor de carga R_2 passa a ser suprido em energia pelo capacitor C_2, e não pela fonte de entrada v_i. A forma de onde em "dente de serra" é tão mais acentuada quando menor for o produto $R_2 C_2$. ■

```
...
void f(double x[], double u, double dx[]) {
  if (x[0] >= x[1]) {
      dx[0] = (-2*x[0] + x[1] + u)/(R1*C1);
      dx[1] = (x[0] - ((R1+R2)/R2)*x[1])/(R1*C2);
    }
  else {
      dx[0] = (-x[0] + u)/(R1*C1);
      dx[1] = -x[1]/(R2*C2);
    }
}

int main(void) {
  ...
  // Condições iniciais
  for (i=0; i<2; i++) x[i]=0.0;
  // Simulação
  do {
      u=9*sqrt(2)*sin(120*M_PI*t);
      y=x[1];
      // Imprime t,y
      ...
      f(x,u,dx);
      for (i=0; i<2; i++) x[i] += T*dx[i];
      t += T;
    }
  while (t <= tfinal);
}
```

Figura 4.2: Trechos do programa de simulação do exemplo 4.2-A

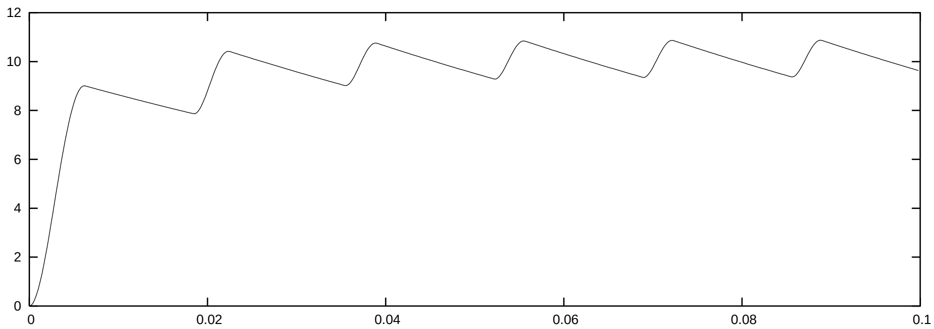


Figura 4.3: Saída do circuito da figura 4.1

4.3 Aplicativos de simulação e análise

Existem inúmeros aplicativos que são utilizados para simulação e análise de sistemas. Os mais populares são as ferramentas de manipulação matricial que conciliam rotinas numéricas com poderosas capacidades de interfaceamento gráfico. Os mais conhecidos são o *Matlab*, da *MathWorks* (`http://www.mathworks.com/`), e o *Scilab*, desenvolvido pelo *INRIA* (`http://www.scilab.org/`). Este último será adotado como exemplo por ser gratuito e poder ser copiado livremente.

Os dados básicos do *Scilab* são matrizes, para as quais estão definidas as operações elementares. Uma operação de definição das matrizes A e B e atribuição a C do produto da transposta de A pela inversa de B seria codifificada em *Scilab* pelos seguintes comandos:

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$
$$\mathsf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$
$$\mathsf{C} = \mathsf{A}^T \mathsf{B}^{-1}$$

```
--> A = [1 2; 3 4];
--> B = [1 1; 1 -1];
--> C = A'*inv(B)
 C  =
!   2.   - 1. !
!   3.   - 1. !
```

As letras maiúsculas e minúsculas são diferenciadas nos nomes das variáveis (`A` $\neq$ `a`, `B` $\neq$ `b`, etc.). Cada comando executado exibe o resultado da sua execução. Para suprimir este comportamento, o comando deve ser seguido de um "`;`" (ponto-e-vírgula), como foi o caso dos dois primeiros comandos acima.

Outro tipo de dado é o polinômio. Um polinômio é criado a partir de um vetor com seus coeficientes ou com suas raízes, utilizando a função `poly`. As raízes de um polinômio podem ser calculadas pela função `roots`:

$$N(s) = s^2 + 3s + 4$$
$$D(s) = (s+1)(s+2)(s+3) \quad \Rightarrow$$

```
-->N = poly([4 3 1],"s","coeff")
 N  =          2
    4 + 3s + s
-->D = poly([-1 -2 -3],"s","roots")
 D  =            2   3
    6 + 11s + 6s + s
-->roots(D)
 ans  =
! - 1. !
! - 2. !
! - 3. !
```

Um sistema linear pode ser construído a partir do seu modelo no espaço de estados ou de sua função de transferência, utilizando a função `syslin`. Um primeiro parâmetro pode assumir os valores `'c'` ou `'d'`, caso o sistema seja contínuo ou discreto, respectivamente. Por exemplo, a partir dos polinômios $N(s)$ e $D(s)$ anteriores, pode-se definir:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad \Rightarrow$$

```
-->p = syslin('c',N,D)
 p  =            2
       4 + 3s + s
    ----------------
                2   3
    6 + 11s + 6s + s
```

Uma vez que se tenha definido o sistema, sua resposta para uma entrada determinada pode ser simulada através da função `csim`. Esta função requer ao menos três parâmetros:

- o sinal de entrada, que pode ser um vetor de valores, uma função ou simplesmente `"step"`, para uma entrada degrau unitário;
- um vetor contendo os instantes de simulação; este vetor pode ser construído usando a notação `t =` $t_{\texttt{ini}}$`:`Δt`:`$t_{\texttt{fin}}$;
- o sistema a ser simulado.

A função `csim` retorna um vetor da mesma dimensão do vetor `t`, contendo o valor do sinal de saída para cada instante de tempo. Para simular o sistema definido anteriormente de 0 a 5 segundos com um passo de simulação de 0.05s e com uma entrada degrau unitário:

$$u(t) = 1$$
$$Y(s) = G(s)U(s)$$

$\Rightarrow$

```
-->t = 0:0.05:5;
-->y = csim("step",t,p);
```

Os valores numéricos do sinal de saída podem ser manipulados numericamente no vetor `y`. Podem também ser plotados em um gráfico $y \times t$ usando a função `plot2d(t,y)`. O resultado desta operação está indicado no gráfico da figura 4.4.

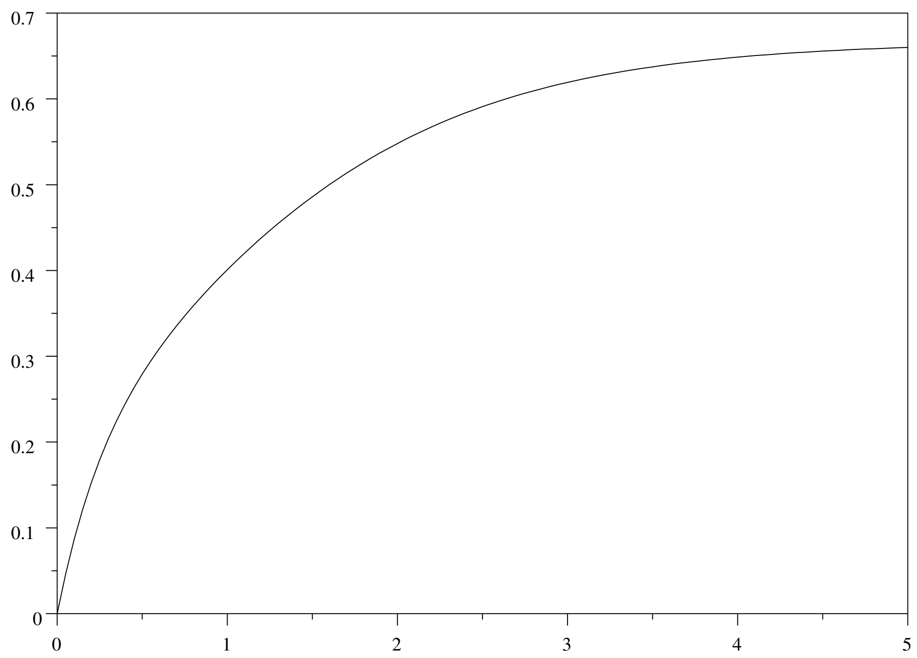


Figura 4.4: Resultado da simulação de um sistema utilizando *Scilab*

O *Scilab* possui uma infinidade de outras funções. Para matrizes, pode calcular autovalores (`spec`), traço (`trace`), determinante (`det`), exponencial (`exp`), etc. Com polinômios, pode fazer algumas operações simbólicas (`addf`, `mulf`, `rdivf` e `derivat`) e evaluar (`horner`). Para sistemas de controle, pode discretizar (`dscr`), converter de função de transferência para o espaço de estados (`tf2ss`, `cont_frm`) e vice-versa (`ss2tf`), além de inúmeras outras funcionalidades. A lista completa de funções pode ser consultada na ajuda em linha do próprio *Scilab* ou em um tutorial sobre o aplicativo [MP01].

4.4 Simulação analógica

A simulação analógica se baseia essencialmente em equipamentos eletrônicos, que formam a chamada *computação analógica*. Muitos desses sistemas são construídos a partir de blocos amplificadores baseados em *amplificadores operacionais*. Nesta breve introdução sobre o assunto recapitularemos os conceitos essencias dos amplificadores operacionais ideais e veremos como eles podem ser utilizados na simulação de sistemas analógicos lineares.

4.4.1 Amplificadores operacionais ideais

O amplificador operacional, ou simplesmente operacional, é um amplificador de alto ganho, ao qual geralmente é acrescentada realimentação para controlar sua característica de resposta. É utilizado para executar uma grande variedade de funções lineares (e também algumas operações não-lineares). O amplificador operacional integrado obteve grande aceitação pois, além da versatilidade, oferece todas as vantagens dos circuitos integrados monolíticos: tamanho pequeno, alta confiabilidade, custo reduzido, temperatura equalizada e pequenas tensão e corrente de deslocamento (*off-set*).

A figura 4.5 mostra o diagrama esquemático de um operacional e seu circuito equivalente. Um número muito grande de amplificadores operacionais apresenta entradas diferenciais, com tensões v_1 e v_2 aplicadas, respectivamente, aos terminais inversor e não-inversor. Quase todos os operacionais apresentam apenas um terminal de saída.

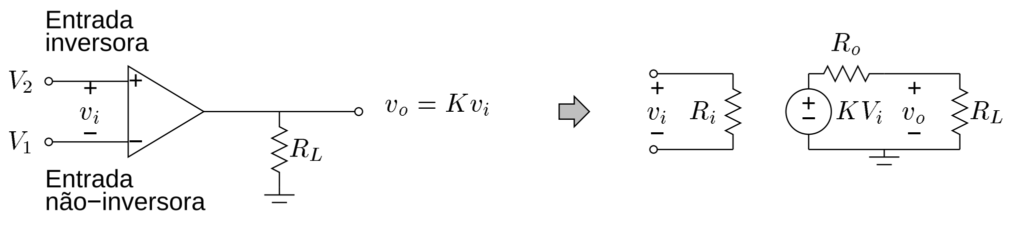


Figura 4.5: Amplificador operacional básico e seu circuito equivalente

O amplificador operacional ideal apresenta as seguintes características:

- Resistência de entrada infinita ($R_i \to \infty$)
- Resistência de saída nula ($R_o \to 0$)
- Ganho de tensão infinito ($K \to \infty$)

- Balanço perfeito ($v_o = 0$ quando $v_1 = v_2$)
- Largura de banda infinita (se $v_i = \sin \omega t$, $v_o = K \sin \omega t$ mesmo quanto $\omega \to \infty$).

Nenhuma destas hipóteses é plenamente satisfeita pelos amplificadores operacionais reais, mas podem ser consideradas satisfatoriamente atendidas dentro da faixa de operação do dispositivo para a maioria dos efeitos práticos.

4.4.2 Operações básicas

A figura 4.6 mostra a forma mais usual de utilização de amplificadores operacionais, com impedâncias de realimentação (Z_1 e Z_2) e a entrada não-inversora aterrada. Nesta configuração, assumindo que $R_i \to \infty$, a corrente $I(s)$ que atravessa Z_1 também atravessa Z_2, como indicado na figura 4.6. Além disso, dado que $V_o(s)$ é finito e assumindo que $K \to \infty$:

$$V_o = -KV_i' \quad \Rightarrow \quad V_i' = -\frac{V_o}{K} \quad \Rightarrow \quad V_i' \to 0$$

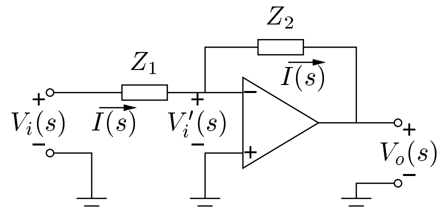


Figura 4.6: Amplificador operacional com realimentação de tensão

A operação do circuito pode agora ser descrita nos seguintes termos: na entrada do amplificador existe um *terra virtual*. O termo "virtual" é utilizado para indicar que, embora a realimentação da saída para a entrada por meio de Z_2 sirva para manter a tensão v_i nula, realmente não existe corrente fluindo neste "curto-circuito" entre as entradas inversora e não-inversora do operacional. Com isso:

$$\left\{ \begin{array}{lll} V_i = Z_1 I + V_i' & \Rightarrow \quad V_i = Z_1 I & \Rightarrow \quad I = \dfrac{V_i}{Z_1} \\ V_i' = Z_2 I + V_o & \Rightarrow \quad V_o = -Z_2 I & \Rightarrow \quad I = -\dfrac{V_o}{Z_2} \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad K_v = \frac{V_o}{V_i} = -\frac{Z_2}{Z_1} \tag{4.8}$$

A configuração da figura 4.6 tem um ganho de tensão K_v que depende das impedâncias Z_1 e Z_2. Modificando-se o tipo e o valor dos componentes que constituem estas impedâncias, consegue-se implementar as operações básicas da simulação analógica.

Inversor

Se $Z_1 = Z_2$ na equação 4.8, então $K_v = -1$. Deste modo, esse circuito atua como um inversor de sinal. Se dois desses amplificadores forem conectados em cascata, a saída do segundo estágio será igual à entrada do primeiro.

Amplificador

Se a relação Z_2/Z_1 é igual a uma constante real c, então $K_v = -c$ e o sinal de entrada é multiplicado pelo fator de escala $-c$[1]. Geralmente, neste caso de multiplicação por uma constante, Z_1 e Z_2 são selecionados como resistores de precisão.

Somador

O esquema da figura 4.7 pode ser usado para obter na saída uma combinação linear dos sinais aplicados na entrada. Visto que existe um ponto de terra virtual na entrada do operacional, temos:

$$i = \frac{v_1}{R_1} + \frac{v_2}{R_2} + \cdots + \frac{v_n}{R_n} \quad \Rightarrow \quad v_o = -R'i = -\left(\frac{R'}{R_1}v_1 + \frac{R'}{R_2}v_2 + \cdots + \frac{R'}{R_n}v_n\right)$$

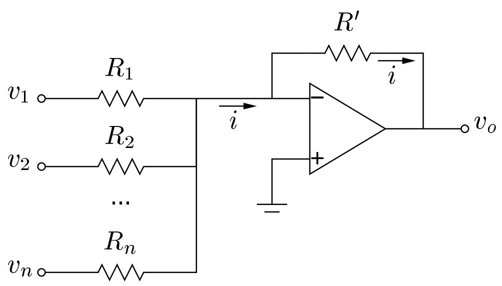


Figura 4.7: Somador baseado em amplificador operacional

O sinal de saída v_o é uma soma ponderada dos sinais de entrada v_i, $i = 1, 2, \cdots$. Se $R_1 = R_2 = \cdots = R_n = R$, então:

$$v_o = -\frac{R'}{R}\left(v_1 + v_2 + \cdots + v_n\right)$$

e a saída é proporcional à soma das entradas.

Integrador

Se, no esquema da figura 4.6, fizermos Z_1 ser um resistor de valor R e Z_2 ser um capacitor de valor C, chegaremos à primeira configuração da figura 4.8, onde:

$$v_i = Ri \quad \Rightarrow \quad i = \frac{v_i}{R}$$
$$v_o = -\frac{1}{C}\int i\,dt \quad \Rightarrow \quad v_o = -\frac{1}{RC}\int v_i\,dt$$

[1]Se $c > 1$, tem-se um amplificador propriamente dito; se $c < 1$, trata-se de um atenuador; finalmente, se $c = 1$, recai-se no caso do inversor.

Portanto, o sinal de saída v_o é a integral do sinal de entrada v_i, multiplicada por um fator de escala $-1/RC$. Este mesmo resultado poderia ser obtido tomando-se as impedâncias do resistor e do capacitor e substituindo-se na equação 4.8, o que faz aparecer a função de transferência do integrador $(1/s)$:

$$V_o = -\frac{Z_2}{Z_1}V_i = -\frac{\frac{1}{sC}}{R}V_i = -\frac{1}{RC} \cdot \frac{1}{s} \cdot V_i$$

Diferenciador

Se fizermos Z_1 ser um capacitor de valor C e Z_2 ser um resistor de valor R, como mostra o segundo esquema da figura 4.8, uma abordagem similar leva a:

$$v_o = -RC\frac{dv_i}{dt} \quad \Rightarrow \quad V_o = -RC \cdot s \cdot V_i$$

Portanto, o sinal de saída v_o é a derivada do sinal de entrada v_i, multiplicada por um fator de escala $-RC$.

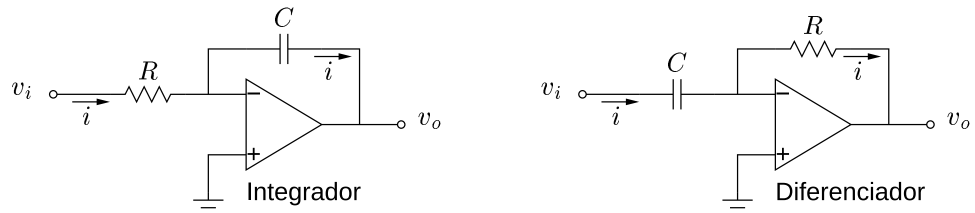


Figura 4.8: Integrador e diferenciador analógicos

4.4.3 Computação analógica

Um computador analógico consiste de uma série de blocos inversores, somadores e integradores que podem ser interligados de modo a construir a função de transferência desejada. Diferenciadores não são utilizados em razão de sua característica de alto ganho para sinais de alta freqüência, o que os leva a amplificar ruídos. Os blocos básicos são representados pelos símbolos da figura 4.9. É importante lembrar que todos os blocos, em razão de serem baseados nos circuitos com operacionais da seção 4.4.2, geram um sinal de saída invertido.

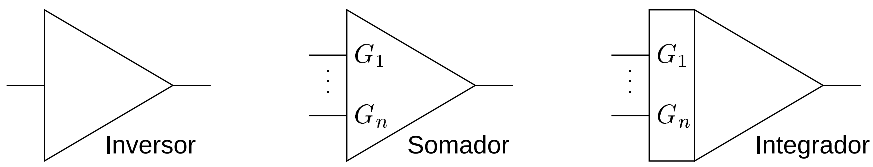


Figura 4.9: Símbolos dos blocos básicos de um computador analógico

Exemplo 4.4-A: Simulação de equação diferencial

Construa, via computação analógica, um circuito que simula a equação diferencial a seguir e permite gerar o sinal de saída $v(t)$ como uma tensão elétrica:

$$\ddot{v} + k_1\dot{v} + k_2 v = u$$

Comecemos assumindo que a tensão $\ddot{v}$ está disponível. Então, por meio de um integrador (a) de ganho 1, uma tensão igual a $-\dot{v}$ é obtida. Um segundo integrador (b) de ganho 1 fornece uma tensão igual a v, conforme o primeiro diagrama da figura 4.10.

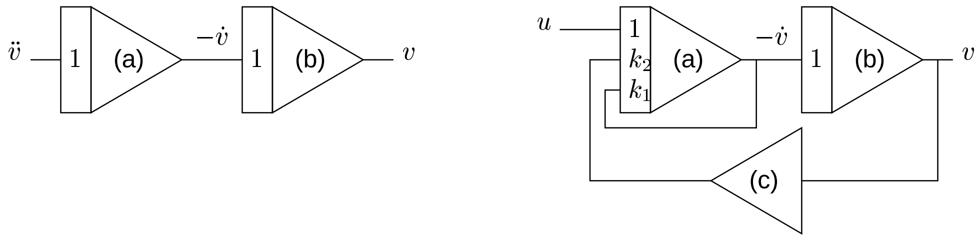


Figura 4.10: Diagrama da simulação analógica do exemplo 4.4-A

Da equação diferencial, sabe-se que $\ddot{v} = -k_1\dot{v} - k_2 v + u$. Basta então que este sinal seja gerado e que ele passe a ser a entrada do integrador (a). O diagrama final da simulação analógica também está indicado na figura 4.10. Nota-se a necessidade de um bloco adicional para inverter o sinal de v.

Tomando-se como base o esquema da figura 4.6, para o inversor (c) devem ser escolhidos dois resistores iguais de tal forma que $Z_1 = Z_2 = R$. Para o integrador (b), deve-se adotar o primeiro esquema da figura 4.8, escolhendo-se valores para o resistor e o capacitor tais que o ganho $G = 1/RC$ seja unitário. Finalmente, para o integrador (a) será adotada a construção da figura 4.11, que concilia em um mesmo dispositivo as características de um integrador e de um somador. Os valores dos componentes devem ser tais que:

$$\frac{1}{R_3 C} = 1 \qquad \frac{1}{R_2 C} = k_2 \qquad \frac{1}{R_1 C} = k_1$$

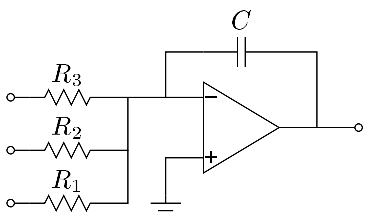


Figura 4.11: Somador e integrador analógicos em um mesmo dispositivo

Valores típicos para estes resistores são da ordem de $k\Omega$. Os capacitores geralmente são eletrolíticos, para se conseguir os ganhos desejados. ■

Exercícios

A. Para o circuito retificador do exemplo 4.2-A, determine por simulação o valor mínimo de R_2 para que a tensão de saída não apresente oscilações de amplitude superior a 2% do seu valor máximo. Com base neste resultado, e supondo que o circuito vai ser utilizado em uma fonte CC de 10V com variação de tensão máxima admissível de 2% para mais ou para menos, calcule a corrente máxima e a potência máxima da fonte (lembre-se que $P = v \times i$).

B. No capítulo 2, o exemplo 2.3-C se baseia no modelo da equação 2.13, ou seja,

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 25y^2 = f$$

A figura 2.7 apresenta a comparação entre o sinal de saída previsto utilizando o modelo não-linear e a sua aproximação baseada no modelo linearizada. Os dados referentes ao comportamento do modelo não-linear foram obtidos por simulação, enquanto que as características do modelo linearizado são baseadas na resposta calculada do sistema, indicada na equação 2.20.

Nota-se, por exemplo, que o valor máximo do sinal de saída calculado pelo modelo linearizado é maior que o previsto pelo modelo não-linear. Comprove este resultado, através das seguintes etapas:

1. Utilizando os procedimentos mostrados na seção 4.2, simule numericamente o modelo não-linear pelo menos até o instante de tempo onde ocorre o valor máximo do sinal de saída.
2. Através da análise da equação 2.20, calcule o valor máximo do sinal de saída previsto pelo modelo linearizado.
3. Determine a diferença percentual entre estes dois resultados.

C. Utilize o *Scilab* para refazer os seguintes exercícios:

- do capítulo 2: O e Q
- do capítulo 3: F, G, H, I, J, K, L e M

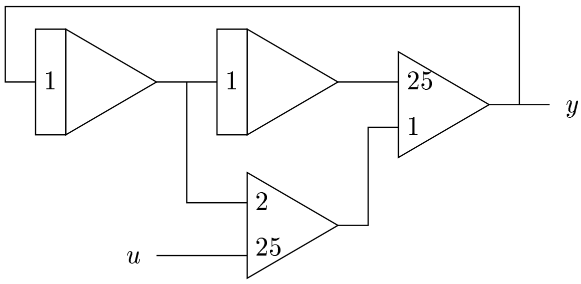
D. Faça o diagrama de simulação analógica para o sistema descrito pela função de transferência a seguir. Dê valores realísticos aos resistores e capacitores necessários para a implementação da simulação.

$$G(s) = \frac{4}{s^3 + 5s^2 + 3s + 4}$$

E. Faça o diagrama de simulação analógica para o sistema descrito pela função de transferência a seguir (sugestão: parta de uma representação em variáveis de estado do sistema).

$$G(s) = \frac{s + 4}{s^2 + 3s + 4}$$

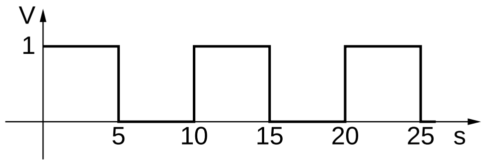
F. Com base no diagrama de computação analógica a seguir:



1. determine um modelo no espaço de estados relacionando o sinal de entrada $u(t)$ e o sinal de saída $y(t)$ (sugestão: utilize como variáveis de estado as saídas dos integradores);
2. simule e plote via *Scilab* o sinal de saída $y(t)$ nos primeiros 5s para condições iniciais nulas quando:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } t \geq 0 \\ 0 & \text{para } t < 0 \end{cases}$$

3. tendo em vista o resultado do item anterior e o fato de o sistema linear obedecer ao princípio da superposição, esboce (sem calcular ou fazer simulação) o sinal de saída esperado quando o sinal de entrada tiver a forma de onda a seguir:



4. comprove a afirmação do item anterior por simulação.

Capítulo 5

Modelagem de sistemas dinâmicos

5.1 Introdução

Neste capítulo serão mostrados exemplos de modelagem de alguns tipos de sistemas físicos mais usuais em Engenharia de Controle: sistemas elétricos, mecânicos, eletromecânicos, fluídicos e térmicos.

A metodologia adotada será baseada nas equivalências existentes entre sistemas. Os sistemas elétricos serão adotados como base, tendo em vista a maior familiaridade com este tipo de sistema.

5.2 Sistemas elétricos

A modelagem de sistemas elétricos baseia-se nos elementos ideais da tabela 2.2 (indutores, capacitores e resistores) e nas leis de Kirchhoff para correntes e tensões. Além dos procedimentos normalmente empregados em Teoria dos Circuitos para resolução de problemas, estes sistemas podem ser modelados com o auxílio de diagramas de blocos e grafos de fluxo de sinal, conforme o exemplo 5.2-A a seguir.

Exemplo 5.2-A: Modelagem de circuito elétrico por diagrama de blocos

Dado o circuito elétrico da figura 5.1, obtenha o diagrama de blocos equivalente ao sistema, representando cada um dos componentes por um bloco elementar. Calcule em seguida a função de transferência, utilizando a fórmula de Mason.

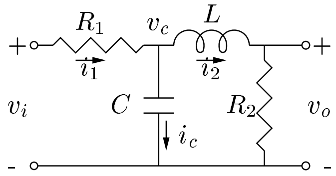


Figura 5.1: Circuito elétrico a modelar por diagrama de blocos no exemplo 5.2-A

Cada elemento do circuito é descrito pelo bloco correspondente à sua equação característica. A escolha de qual variável (corrente ou tensão) será a variável de entrada e qual será a variável de saída é feita de forma a facilitar a interconexão dos blocos, conforme indicado na tabela 5.1. O diagrama de blocos final está indicado na figura 5.2.

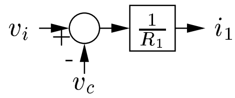
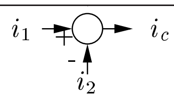
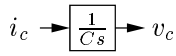
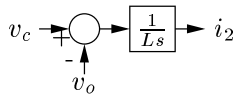
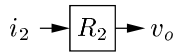
Elemento	**Equação**	**Diagrama de bloco**
Resistor R_1	$v_i - v_c = R_1 i_1 \quad \Rightarrow \quad i_1 = \left(\frac{1}{R_1}\right)(v_i - v_c)$	
Nó	$i_1 = i_c + i_2 \quad \Rightarrow \quad i_c = i_1 - i_2$	
Capacitor C	$i_c = C\frac{dv_c}{dt} \quad \Rightarrow \quad v_c = \frac{1}{C}\int i_c dt$	
Indutor L	$v_c - v_o = L\frac{di_2}{dt} \quad \Rightarrow \quad i_2 = \frac{1}{L}\int (v_c - v_o) dt$	
Resistor R_2	$v_o = R_2 i_2$	

Tabela 5.1: Diagramas de bloco dos componentes do circuito da figura 5.1

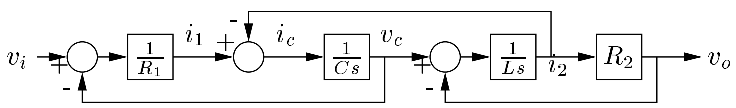


Figura 5.2: Diagrama de blocos equivalente ao circuito da figura 5.1

O grafo de fluxo de sinal correspondente ao diagrama de blocos da figura 5.2 é simples e pode ser visualizado diretamente a partir do diagrama de blocos, sem necessidade de ser desenhado explicitamente.

Há um único caminho direto entre v_i e v_o , cujo ganho é:

$$G_1 = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{Cs} \cdot \frac{1}{Ls} \cdot R_2 = \frac{R_2}{R_1 LCs^2}$$

Há três laços, cujos ganhos são:

$$L_1 = -\frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{Cs} = -\frac{1}{R_1 Cs} \qquad L_2 = -\frac{1}{Cs} \cdot \frac{1}{Ls} = -\frac{1}{LCs^2} \qquad L_3 = -\frac{1}{Ls} \cdot R_2 = -\frac{R_2}{Ls}$$

Os laços 1 e 3 não se tocam. Com isso, o determinante do grafo é dado por:

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3) + (L_1 L_3) = \frac{R_1 LCs^2 + (L + R_1 R_2 C)s + (R_1 + R_2)}{R_1 LCs^2}$$

Como o caminho direto toca todos os três laços, $\Delta_1 = 1$. Logo:

$$G = \frac{G_1\Delta_1}{\Delta} = \frac{R_2}{R_1LCs^2 + (L + R_1R_2C)s + (R_1 + R_2)}$$

O sistema da figura 5.1 é portanto representado por uma função de transferência de segunda ordem. ■

Além dos componentes básicos (resistor, capacitor e indutor), existem muitos outros componentes em sistemas elétricos. Para efeito de comparação com outros tipos de sistema, destacaremos dois outros componentes: o transformador elétrico e o diodo.

5.2.1 Transformador elétrico

Um exemplo simples de um circuito magnético é mostrado na figura 5.3, envolvendo um núcleo e um enrolamento (ou bobina).

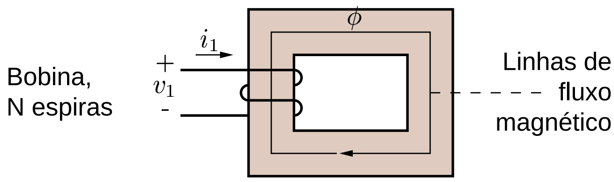


Figura 5.3: Dispositivo magnético elementar

O núcleo é composto de material magnético[1], cuja permeabilidade é muito maior que a do ar. O núcleo é de área transversal uniforme A e é excitado por uma bobina de N espiras que conduz a corrente i. Essa bobina produz um campo magnético no núcleo, que pode ser visualizado em termos de linhas de fluxo, as quais formam malhas fechadas interligadas com a bobina.

Devido à alta permeabilidade do núcleo (2.000 $\sim$ 8.000) em relação à permeabilidade do ar ($4\pi \times 10^{-7}$), o fluxo magnético fica confinado quase inteiramente ao núcleo e a densidade de fluxo é essencialmente uniforme através de uma seção transversal, visto que a área da seção transversal é uniforme. Assumindo também que a permeabilidade é constante (o que só é aceitável se a densidade de fluxo não variar muito), o fluxo no núcleo é dado por:

$$\phi = \frac{\mu N A}{l} i \tag{5.1}$$

onde:

ϕ: fluxo magnético no núcleo (Wb);
μ: permeabilidade do material do núcleo (H/m);
N: número de espiras;
A: área da seção transversal do núcleo (m^2);

[1] O núcleo é usualmente composto de ligas metálicas a base de ferro.

l: comprimento médio do núcleo (m);
i: corrente na bobina (A);

Quando um campo magnético varia no tempo, um campo elétrico é produzido no espaço. Em estruturas magnéticas com bobinas, como a mostrada na figura 4.3, o campo magnético variando no núcleo produz uma tensão induzida nos terminais da bobina, que pode ser calculada pela Lei da Indução de Faraday. O valor desta tensão v é dado por

$$v = -N\frac{d\phi}{dt} \tag{5.2}$$

No transformador elétrico, duas bobinas com N_1 e N_2 espiras, respectivamente, estão enroladas sobre o mesmo núcleo, conforme o esquema da figura 5.4. O símbolo mais usual para transformadores também é visto na figura 5.4.

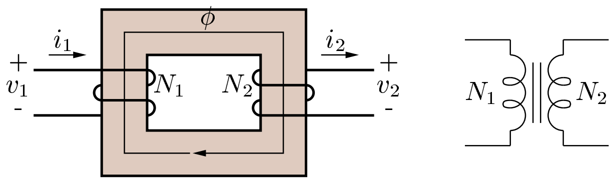


Figura 5.4: Circuito magnético e símbolo de um transformador elétrico ideal

Quando uma tensão de entrada v_1 variando no tempo é injetada no lado primário, um fluxo magnético ϕ é estabelecido no núcleo, de forma que a tensão induzida no enrolamento primário iguala a tensão de entrada, quando se assume que a resistência elétrica das espiras é desprezível (transformador ideal). Tem-se, pela equação 5.2:

$$v_1 = -N_1\frac{d\phi_1}{dt} = -N_1\frac{d\phi}{dt} \tag{5.3}$$

O fluxo magnético no núcleo também passa pelo enrolamento secundário e produz uma tensão induzida v_2, dada por:

$$v_2 = -N_2\frac{d\phi_2}{dt} = -N_2\frac{d\phi}{dt} \tag{5.4}$$

Supondo que $\frac{d\phi}{dt} \neq 0$, o que pressupõe que as tensões não são constantes, a divisão das equações 5.3 e 5.4 leva a:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{N_1}{N_2} \quad \Rightarrow \quad v_2 = \left(\frac{N_2}{N_1}\right) v_1 \tag{5.5}$$

Assim, um transformador ideal muda as tensões na razão direta da relação entre o número de espiras em suas bobinas, desde que estas tensões não sejam constantes.

Um procedimento análogo pode ser feito a partir da equação 5.1 para se determinar a relação entre as correntes i_1 e i_2 :

$$\phi_1 = \phi_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mu N_1 A}{l} i_1 = \frac{\mu N_2 A}{l} i_2 \quad \Rightarrow \quad i_2 = \left(\frac{N_1}{N_2}\right) i_1 \tag{5.6}$$

Portanto, o transformador ideal muda as correntes na razão inversa da relação entre o número de espiras em suas bobinas.

Para efeito de análise, o transformador pode ser modelado por duas fontes dependentes, conforme a figura 5.5.

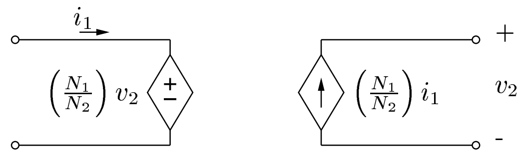


Figura 5.5: Modelo de funcionamento de um transformador elétrico

A análise de um circuito contendo transformadores muitas vezes pode ser facilitada movendo-se componentes do secundário para o primário e vice-versa. Para as fontes, a determinação da equivalência é feita com base nas equações 5.5 e 5.6. Quanto às impedâncias, se uma impedância Z está conectada ao secundário de um transformador, tem-se que:

$$V_2(s) = ZI_2(s)$$

Substituindo V_2 e I_2 pelas grandezas correspondentes no primário, chega=se a:

$$\left(\frac{N_2}{N_1}\right) V_1 = Z \left(\frac{N_1}{N_2}\right) I_1 \quad \Rightarrow \quad V_1(s) = \left[\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 Z\right] I_1(s) \tag{5.7}$$

Portanto, as impedâncias no secundário são vistas do primário multiplicadas pelo quadrado do inverso da relação entre o número de espiras. A figura 5.6 resume os procedimentos de transferência de dispositivos de um lado de um transformador para o outro.

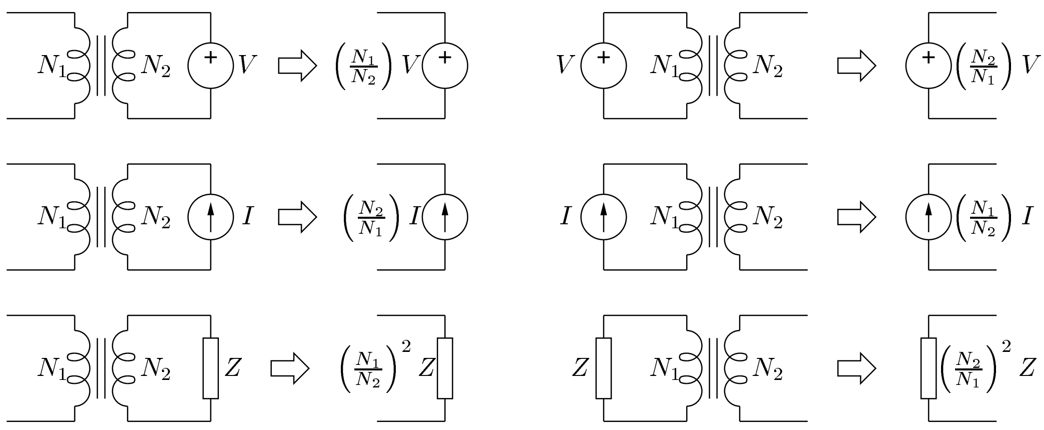


Figura 5.6: Influência de um transformador sobre os dispositivos elétricos

Pelas equações 5.5 e 5.6, tem-se que $v_1 i_1 = v_2 i_2$. Isto significa que a entrada instantânea de potência iguala a saída instantânea de potência, demonstrando que a potência se conserva em um transformador ideal. Em um transformador real, existem perdas no enrolamento e perdas de núcleo, que podem contudo ser modeladas como elementos dissipativos (resistores) associados a um tranformador ideal.

5.2.2 Diodo

O diodo ideal é um dispositivo não-linear que permite a passagem de corrente elétrica em um único sentido. Dito de outra forma, o diodo se comporta como um resistor de resistência nula ou de resistência infinita de acordo com a polaridade da tensão aplicada. Na figura 5.7 apresenta-se a curva de funcionamento e o símbolo de um diodo ideal.

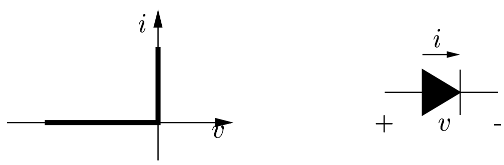


Figura 5.7: Curva de funcionamento e símbolo de um diodo ideal

Os diodos reais atuais são dispositivos a base de materiais semicondutores. Para tensões acima de uma certa ordem de magnitude (~1V), seu comportamento é bastante próximo do comportamento de um diodo ideal.

5.3 Sistemas mecânicos translacionais

Os elementos básicos de um sistema mecânico translacional são as massas, as elastâncias (molas) e os amortecimentos (atritos). As equações características e símbolos destes elementos são dados na tabela 2.2.

A lei fundamental que governa sistemas mecânicos é a segunda lei de Newton. Para um corpo de massa M, tem-se que:

$$F(t) = Ma(t) = M\dot{v}(t) = M\ddot{x}(t) \tag{5.8}$$

onde $a(t)$ é a aceleração, $v(t)$ é a velocidade e $x(t)$ é a posição do corpo.

A equação que define uma mola ideal é a lei de Hooke:

$$F(t) = K\Delta x(t) \tag{5.9}$$

onde K é a constante elástica da mola. A força elástica desenvolvida é diretamente proporcional à diferença do deslocamento de um extremo da mola em relação ao outro. Os corpos reais são bem descritos pela lei de Hooke para valores não muito grandes de $\Delta x(t)$.

O amortecedor ideal representa uma resistência ao movimento de um corpo em relação a outro, resistência essa proporcional à velocidade relativa do corpo em relação ao outro. Uma implementação bastante próxima do ideal para este fenômeno é o atrito viscoso entre um corpo sólido e um fluido (óleo, ar, etc.). Um dispositivo físico modelado como atrito viscoso é o absorvedor de choques (amortecedor) de um automóvel. Se o coeficiente de amortecimento de dois corpos é b, o modelo matemático do atrito viscoso entre eles é:

$$F(t) = b\Delta v(t) \tag{5.10}$$

A modelagem do atrito com base apenas no atrito viscoso é adequada para grandes velocidades relativas. Para pequenas velocidades relativas, porém, a modelagem do atrito é mais complexa, devido à maior interferência da rugosidade das superfícies em contato. Nesta situação, devem ser considerados também o atrito seco e o atrito de Coulomb.

O atrito seco é uma força de atrito inicial F_0 que desaparece rapidamente após o início do movimento. Por sua vez, para vencer o atrito de Coulomb é necessário gerar uma força F_c praticamente constante, proporcional à força normal (reação à força peso). A combinação dos três tipos de atrito é mostrada na figura 5.8. Nos nossos exemplos, sempre suporemos que as velocidades relativas são suficientemente grandes para que apenas o atrito viscoso necessite ser considerado.

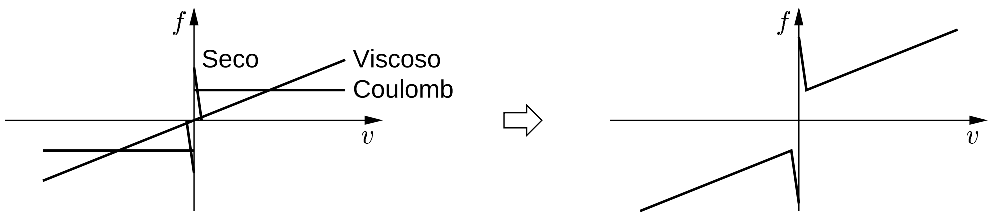


Figura 5.8: Curva característica de sistema com atrito de Coulomb e atrito seco

Exemplo 5.3-A:

Escreva as equações do movimento y do sistema mecânico da figura 5.9, excitado pelo movimento u da barra móvel.

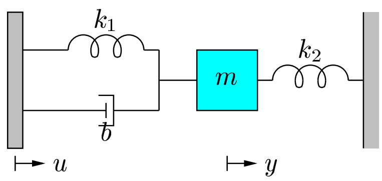


Figura 5.9: Sistema mecânico translacional do exemplo 5.3-A

O diagrama de corpo livre equivalente à massa m é visto na figura 5.10. A aplicação da segunda lei de Newton leva ao seguinte:

$$F = m\ddot{y} \quad \Rightarrow \quad f_{k1} + f_b - f_{k2} = m\ddot{y} \quad \Rightarrow \quad k_1(u-y) + b(\dot{u} - \dot{y}) - k_2 y = m\ddot{y}$$

Portanto, a equação de movimento do sistema é:

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + (k_1 + k_2)y = b\dot{u} + k_1 u$$

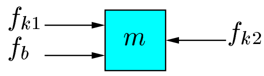


Figura 5.10: Diagrama de corpo livre correspondente à figura 5.9

Para condições iniciais nulas, a aplicação da transformada de Laplace nesta equação gera:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{bs + k_1}{ms^2 + bs + (k_1 + k_2)} \tag{5.11}$$

que é a função de transferência do sistema. ■

5.3.1 Equivalência com circuitos elétricos

O procedimento para geração do análogo elétrico de um sistema mecânico pode ser decomposto nos seguintes passos:

1. Estabeleça as analogias entre componentes e grandezas nos dois sistemas, respeitando as equivalências da tabela 5.2.

Sistema mecânico translacional	**Sistema elétrico**
Velocidade linear v	Tensão v
Força F	Corrente i
Massa M	Capacitor C
Amortecedor b	Resistor $\frac{1}{b}$
Mola k	Indutor $\frac{1}{k}$

Tabela 5.2: Equivalência entre sistemas mecânicos translacionais e sistemas elétricos

2. Todos os capacitores representando massas têm um dos seus terminais aterrados.
3. A tensão no nó não aterrado em cada capacitor representa a velocidade nas massas correspondentes.
4. Os outros componentes são conectados entre os nós em um arranjo que respeita as conexões existentes no sistema mecânico.
5. Inserir as fontes de corrente aterradas representando as forças aplicadas
6. Inserir as fontes de tensão representando as velocidades impostas: para velocidades em relação ao referencial inercial, um dos terminais da fonte é aterrado; para velocidades relativas, os terminais estão conectados aos nós correspondentes.

Exemplo 5.3-B: Equivalente elétrico de sistema mecânico translacional
A figura 5.11 apresenta o equivalente elétrico do sistema mecânico do exemplo 5.3-A, tanto no domínio no tempo quanto no domínio da freqüência. Como há apenas uma massa, o circuito elétrico tem apenas um nó. É interessante ressaltar que os deslocamentos y e u não têm equivalente direto no circuito elétrico: as grandezas correspondentes às tensões são as velocidades $v_y = \dot{y}$ e $v_u = \dot{u}$.

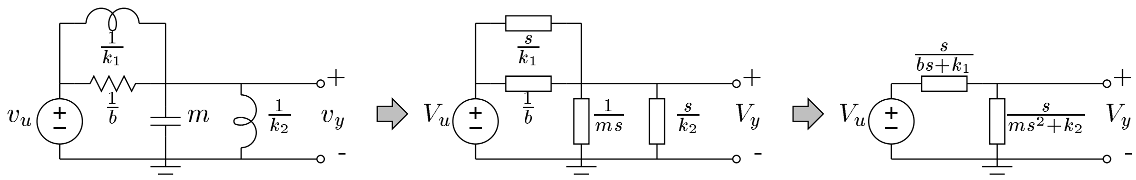


Figura 5.11: Equivalente elétrico do sistema mecânico da figura 5.9

A relação entre V_y e V_u se caracteriza como um divisor de tensão:

$$V_y(s) = \frac{\frac{s}{ms^2+k_2}}{\frac{s}{bs+k_1} + sms^2 + k_2} V_u \quad \Rightarrow \quad \frac{V_y(s)}{V_u(s)} = \frac{bs + k_1}{ms^2 + bs + (k_1 + k_2)}$$

Para se estabelecer a relação entre $Y(s)$ e $U(s)$, e não entre $Vy(s)$ e $V_u(s)$, é preciso apenas relembrar que, para condições iniciais nulas, $V_y(s) = sY(s)(v_y = \dot{y})$ e $V_u(s) = sU(s)$:

$$\frac{sY(s)}{sU(s)} = \frac{bs + k_1}{ms^2 + bs + (k_1 + k_2)} \quad \Rightarrow \quad G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{bs + k_1}{ms^2 + bs + (k_1 + k_2)} \tag{5.12}$$

Este resultado, como esperado, é idêntico à equação 5.11, obtida no exemplo 5.3-A. ■

Exemplo 5.3-C: Acelerômetro

Um acelerômetro, como indica seu nome, é um medidor de aceleração linear, muito utilizado em aviões e foguetes. Um diagrama esquemático de um acelerômetro é dado na figura 5.12. Obtenha o modelo dinâmico deste sistema.

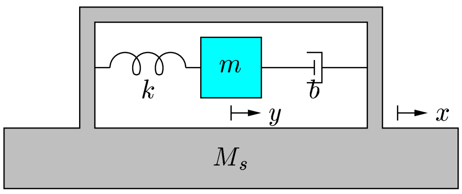


Figura 5.12: Esquema de um acelerômetro

Na figura 5.12, x é o deslocamento absoluto da massa M_S em relação ao referencial inercial e y é o deslocamento relativo da massa M em relação a M_S. Fazendo o diagrama de corpo livre da massa M , indicado na figura 5.13:

$$F = m \cdot a \quad \Rightarrow \quad -(f_k + b_b) = M \cdot (x \ddot{+} y) \quad \Rightarrow \quad -(ky + b\dot{y}) = M\ddot{x} + M\ddot{y} \quad \Rightarrow$$

$$\ddot{y} + \left(\frac{b}{M}\right)\dot{y} + \left(\frac{k}{M}\right)y = -\ddot{x} \tag{5.13}$$

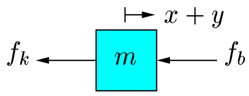


Figura 5.13: Diagrama de corpo livre do acelerômetro da figura 5.12

Este mesmo resultado poderia ser obtido utilizando-se o circuito elétrico equivalente ao acelerômetro, indicado na figura 5.14:

$$V_y(s) = -\frac{\frac{s}{bs+k}}{\frac{s}{bs+k} + \frac{1}{Ms}} V_x(s) \quad \Rightarrow \quad V_y(s) = -\frac{Ms^2}{Ms^2 + bs + k} V_x(s) \quad \Rightarrow$$

$$\cancel{s}Y = (s) = -\frac{s^2}{s^2 + \left(\frac{b}{M}\right) s + \left(\frac{k}{M}\right)} \cancel{s}X(s) \quad \Rightarrow \quad \ddot{y} + \left(\frac{b}{M}\right)\dot{y} + \left(\frac{k}{M}\right) y = -\ddot{x} \qquad (5.14)$$

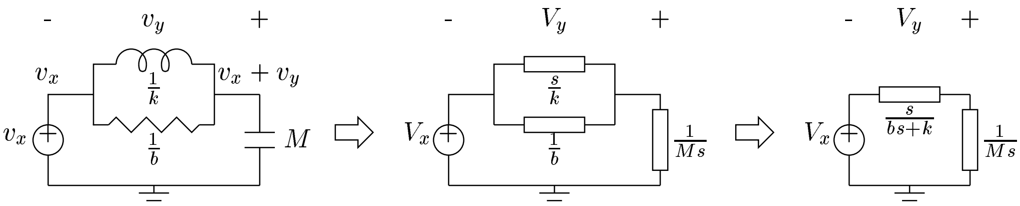


Figura 5.14: Equivalente elétrico do acelerômetro da figura 5.12

Fazendo-se por exemplo $\frac{b}{M} = 3$ e $\frac{k}{M} = 1$, a equação diferencial que rege o comportamento do acelerômetro é $\ddot{y} + 3\dot{y} + y = -\ddot{x}$. Para esta situação, se o sistema for submetido a uma aceleração constante $\ddot{x} = \alpha$, a saída do sistema está indicada na figura 5.15.

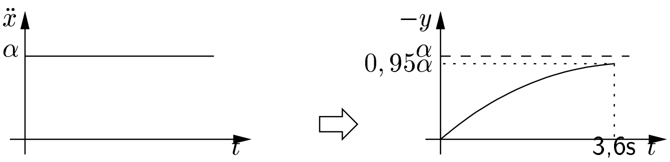


Figura 5.15: Comportamento de um acelerômetro sujeito a uma aceleração constante

Nota-se que, após um certo tempo de estabilização, que para esta situação é da ordem de 4s, o deslocamento relativo y do acelerômetro é diretamente proporcional à aceleração $\ddot{x}$. Portanto, medindo-se o deslocamento relativo y após sua estabilização, tem-se uma medida da aceleração linear do corpo. ■

Exemplo 5.3-D: Modelo dinâmico do corpo humano

Utiliza-se o modelo do corpo humano indicado na figura 5.16 para estudo de vibrações e impactos. Obtenha o seu circuito elétrico equivalente.

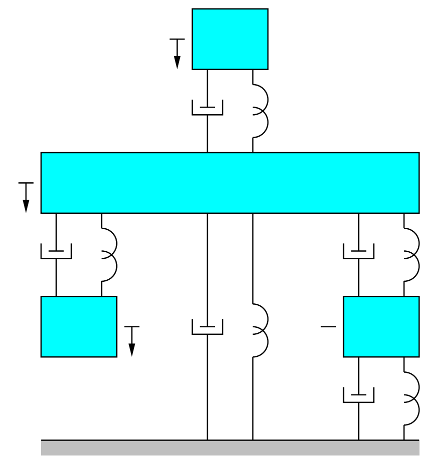


Figura 5.16: Modelo mecânico do corpo humano para o exemplo 5.3-D

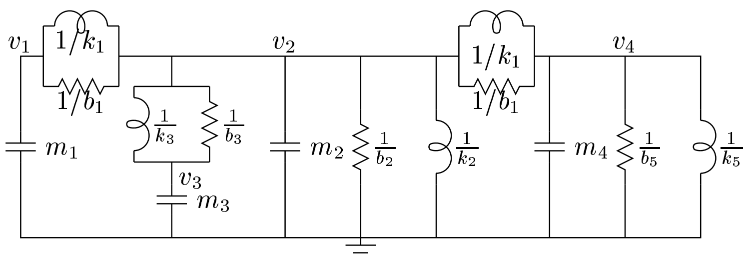


Figura 5.17: Equivalente elétrico do modelo mecânico da figura 5.16

A figura 5.17 apresenta o circuito equivalente elétrico para o modelo mecânico do corpo humano. Apesar do relativo grande número de componentes, o modelo pode ser obtido facilmente por associação das impedâncias em paralelo e em série. Note-se a ausência de fontes, já que nenhuma força é aplicada e nenhuma velocidade é imposta ao sistema. ■

5.3.2 Alavanca ideal

Uma alavanca ideal é um corpo rígido linear de massa desprezível que pode girar em torno de um ponto de apoio, conforme indicado no esquema da figura 5.18. O ponto de apoio divide a alavanca em dois segmentos de comprimentos l_1 e l_2, respectivamente. Uma força F_1 é aplicada em um dos lados da alavanca e a carga, em reação, aplica uma força F_2 no outro braço da alavanca, ou vice-versa. Os deslocamentos lineares nas duas extremidades são, respectivamente, y_1 e y_2; as velocidades lineares são v_1 e v_2, respectivamente.

Por trigonometria, sabe-se que:

$$\begin{aligned} y_2 &= l_2 \sin\theta \\ y_1 &= l_1 \sin\theta \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad y_2 = \left(\frac{l_2}{l_1}\right)$$

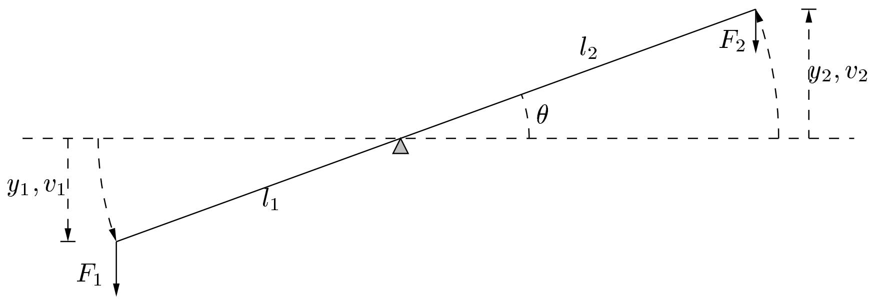


Figura 5.18: Alavanca ideal

Derivando-se esta expressão obtém-se a relação entre as velocidades:

$$v_2 = \left(\frac{l_2}{l_1}\right) v_1 \tag{5.15}$$

Como a alavanca ideal não tem massa, toda a energia produzida pelo trabalho da força F_1 é transferida para o trabalho realizado pela força F_2 . Dito de outra forma, o torque resultante na alavanca é sempre nulo, ou seja:

$$\tau_1 = \tau_2 \quad \Rightarrow \quad l_1 F_1 \cos\theta = l_2 F_2 \cos\theta \quad \Rightarrow \quad F_2 = \left(\frac{l_1}{l_2}\right) F_1 \tag{5.16}$$

Das equações 5.15 e 5.16, por comparação com as equações 5.5 e 5.6, conclui-se que o equivalente elétrico de uma alavanca idel é o transformador elétrico ideal, com o comprimento dos braços fazendo o mesmo papel do número de espiras. Uma diferença importante é que, enquanto o transformador elétrico só funciona para tensões variantes no tempo, a alavanca também transforma velocidades constantes. A equivalência entre alavancas e transformadores está indicada na figura 5.19.

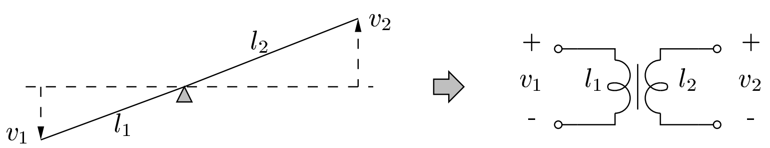


Figura 5.19: Equivalência entre alavancas e transformadores elétricos

Exemplo 5.3-E: Dispositivo mecânico com alavanca

Para o dispositivo mecânico da figura 5.20, determine um circuito elétrico equivalente. Assuma que os ângulos de rotação são pequenos e que, para $f = 0$, tem-se o equilíbrio estático com $y = 0$.

A figura 5.21 apresenta o equivalente elétrico do sistema da figura 5.20, tanto incluindo o transformador correspondente à alavanca quanto fazendo a transformação necessária para poder eliminá-lo. ■

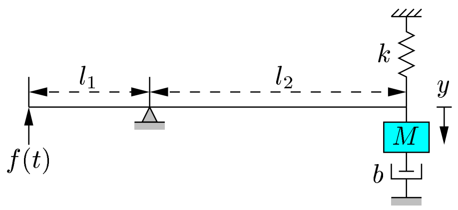


Figura 5.20: Dispositivo mecânico com alavanca do exemplo 5.3-E

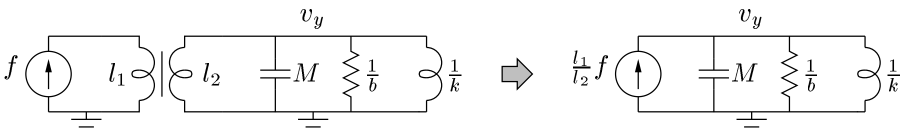


Figura 5.21: Equivalente elétrico do dispositivo da figura 5.20

5.3.3 Deslizador unidirecional

O deslizador unidirecional permite movimentos lineares em uma única direção. Um diagrama esquemático e um possível símbolo para um deslizador unidirecional estão indicados na figura 5.22.

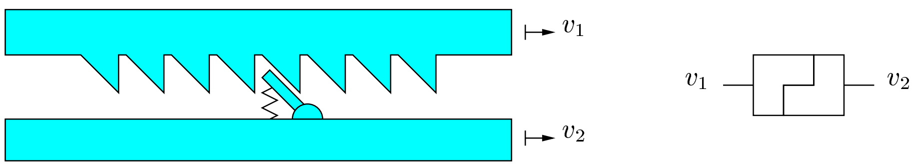


Figura 5.22: Deslizador unidirecional

O deslizador unidirecional é o equivalente mecânico do diodo elétrico. Quando a velocidade v_1 é menor que a velocidade v_2 , a lingueta baixa e as duas velocidades são completamente independentes. Se em algum momento v_1 tender a se tornar maior que v_2, a lingueta é travada nos dentes e as duas velocidades se tornam iguais.

Na figura 5.23 apresenta-se um exemplo de dispositivo mecânico envolvendo um deslizador unidirecional e seu circuito equivalente elétrico.

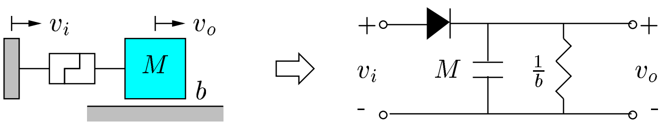


Figura 5.23: Equivalente elétrico de dispositivo com deslizador unidirecional

5.4 Sistemas mecânicos rotacionais

Os sistemas mecânicos rotacionais são aqueles que envolvem corpos girando em torno de um eixo fixo. Seus elementos básicos são os momentos de inércia, as elastâncias (molas rotacionais) e os amortecimentos (atritos rotacionais). As equações características e símbolos destes elementos são dados na tabela 2.2.

5.4.1 Equivalência com circuitos elétricos

Estes sistemas são análogos aos sistemas mecânicos translacionais (as equações são da mesma forma). Conseqüentemente, os sistemas mecânicos rotacionais também podem ser modelados através de diagramas de corpo livre ou utilizando circuitos equivalentes elétricos, respeitando-se as equivalências indicadas na tabela 5.3.

Sistema mecânico rotacional	**Sistema elétrico**
Velocidade angular v	Tensão v
Torque τ	Corrente i
Momento de inércia J	Capacitor C
Amortecedor angular b	Resistor $\frac{1}{b}$
Mola angular k	Indutor $\frac{1}{k}$

Tabela 5.3: Equivalência entre sistemas mecânicos rotacionais e sistemas elétricos

O momento de inércia J para um corpo de massa m girando em torno de um eixo fixo com raio de giração r é dado por:

$$J = mr^2 \qquad \text{(para massas pontuais)} \tag{5.17}$$

$$J = \int r^2 dm \qquad \text{(para massas distribuídas)} \tag{5.18}$$

O torque τ exercido por uma força F perpendicular ao movimento, aplicada a uma distância d do eixo de rotação é:

$$\tau = Fd \tag{5.19}$$

Exemplo 5.4-A:

O sistema mostrado na figura 5.24 consiste de um momento de inércia J_1, correspondendo ao rotor de um motor, ao qual está acoplado um outro momento de inércia J_2, representando uma carga. Potência é transmitida através de uma acoplamento viscoso com coeficiente de atrito b e de um eixo de torção com constante de mola k. Um torque acionador $T_a(t)$ é exercido em J_1 e um torque de carga $T_c(t)$ é exercido em J_2. Defina a equação do movimento $\theta_2(t)$ em função de $T_a(t)$ e $T_c(t)$.

O circuito elétrico equivalente ao dispositivo é mostrado na figura 5.25. Daí, usando a transformada de Laplace, extrai-se facilmente que:

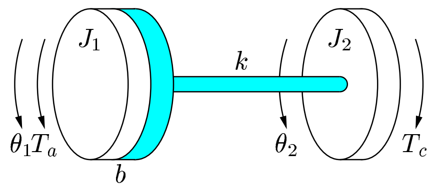


Figura 5.24: Sistema mecânico rotacional do exemplo 5.4-A

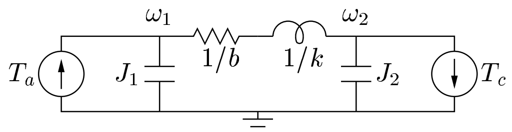


Figura 5.25: Equivalente elétrico do sistema mecânico da figura 5.24

$$\omega_2 = \frac{bk}{s[(kJ_1J_2)s + b(kJ_1 + kJ_2 + J_1J_2)]}T_a - \frac{(kJ_1)s + b(k + J_1)}{s[(kJ_1J_2)s + b(kJ_1 + kJ_2 + J_1J_2)]}T_c$$

$$\theta_2 = \frac{\omega_2}{s} = \frac{bk}{s^2[(kJ_1J_2)s + b(kJ_1 + kJ_2 + J_1J_2)]}T_a - \frac{(kJ_1)s + b(k + J_1)}{s^2[(kJ_1J_2)s + b(kJ_1 + kJ_2 + J_1J_2)]}T_c$$

A aplicação da anti-transformada de Laplace permite obter a equação para $\theta_2(t)$. ■

Exemplo 5.4-B: Pêndulo rotacional

Duas massas pontuais de 1kg cada uma estão presas às duas extremidades de uma haste de massa desprezível. Este conjunto está preso ao teto através de um cordão flexível, conforme mostra a figura 5.26. Torcionando-se inicialmente o cordão de forma a impor ao conjunto um total de voltas equivalente a 4000^0, deixa-se em seguida o conjunto girar de maneira autônoma, sem influências externas. Determine quanto tempo o sistema irá demorar até que a amplitude da oscilação seja menor que 4^o, supondo que a constante rotacional elástica do cordão é de 2×10^{-4} Nm/rad e que o coeficiente de atrito viscoso entre as esferas e o ar é de 3×10^{-4} Nms/rad.

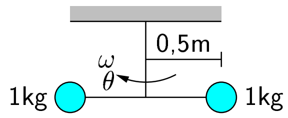


Figura 5.26: Pêndulo rotacional do exemplo 5.4-B

Da equação 5.17, sabe-se que momento de inércia do conjunto é

$$J = 2 \cdot mr^2 = 2 \cdot 1 \cdot 0.5^2 \quad \Rightarrow \quad J = 0.5\text{kgm}^2$$

O circuito equivalente elétrico é dado na figura 5.27. A equação do sistema é dada por:

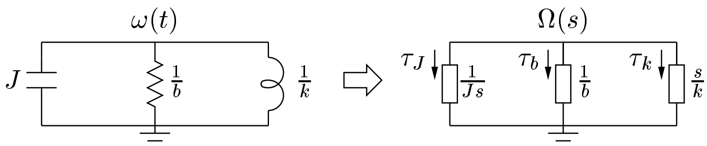


Figura 5.27: Equivalente elétrico do pêndulo da figura 5.26

$$\tau_J + \tau_K + \tau_B = 0 \quad \Rightarrow \quad Js\Omega + \frac{k}{s}\Omega + b\Omega = 0 \quad \Rightarrow \quad (Js^2 + bs + k)\Omega = 0$$

Como $\omega(t) = \dot{\theta}(t)$, sabe-se que $\Omega(s) = s\theta(s)$:

$$\cancel{s}(Js^2 + bs + k)\theta = 0) \quad \Rightarrow \quad J\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + k\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \left(\frac{b}{J}\right)\dot{\theta} + \left(\frac{k}{J}\right)\theta = 0$$

Esta equação deve ser resolvida para condições iniciais $\theta(0) = 4000^o = 69.8\text{rad}$ e $\dot{\theta}(0) = 0\text{rad/s}$. Substituindo-se os valores numéricos dos coeficientes e aplicando-se a transformada de Laplace, chega-se ao resultado:

$$\theta(t) = 69.8e^{-0.0003t}\sin(0.02t + 1.5558)$$

Para que a amplitude da oscilação seja menor que 4^o, ou seja, menor que 0.07rad:

$$69.8e^{-0.0003t} < 0.07 \quad \Rightarrow \quad t > 2302s$$

Portanto, o pêndulo terá atingido uma amplitude de oscilação inferior a 4^o após aproximadamente 38 minutos. ■

Existem também sistemas que envolvem movimentos translacionais e rotacionais. Neste caso, o sistema pode ser decomposto em movimentos translacionais simples unidirecionais e em movimentos rotacionais simples em torno do centro de gravidade, conforme mostra o exemplo 5.4-C.

Exemplo 5.4-C: Sistema mecânico misto (rotacional e translacional)

A figura 5.28 mostra uma barra rígida, de massa M e de comprimento $2l$, pendurada em um corpo de massa m de forma a poder oscilar. A massa m está presa à superfície sobre a qual desliza através de duas molas de constante elástica $k/2$. Obtenha um modelo que relacione o deslocamento s e o ângulo θ. Em seguida, linearize este modelo para pequenos ângulos em torno de $\theta = 0$. Despreze os atritos.

Para este tipo de sistema, é mais fácil se trabalhar com os diagramas de corpo livre dos corpos separados. No ponto de contato entre os dois corpos há uma força de tração T desconhecida, que vai representada pelas suas componentes T_x e T_y nas direções x e y, respectivamente, conforme a figura 5.29.

Para a massa m, teremos apenas que modelar o movimento na direção x, já que na direção y a força peso e a componente T_y da força de tração são anuladas pela forma normal de reação da superfície em que a massa se apóia:

$$T_x - f_{k1} - f_{k2} = m\ddot{s} \quad \Rightarrow \quad T_x - \frac{k}{2}s - \frac{k}{2}s = m\ddot{s} \quad \Rightarrow \quad m\ddot{s} + ks = T_x \tag{5.20}$$

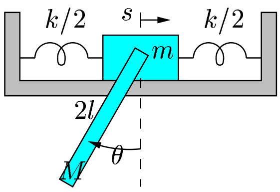


Figura 5.28: Sistema translacional e rotacional do exemplo 5.4-C

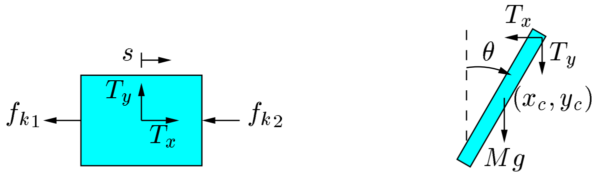


Figura 5.29: Diagramas de corpo livre do sistema da figura 5.28

Assumindo-se a origem do sistema de coordenadas no ponto de interseção do pêndulo quando em repouso, a posição (x_c, y_c) do centro de gravidade da barra M é dada por:

$$(x_c, y_c) = (s - l\sin\theta, -l\cos\theta)$$

Quanto ao movimento da barra M na direção x:

$$-T_x = M\ddot{x}_c \quad \Rightarrow \quad -T_x = M\frac{d^2}{dt^2}(s - l\sin\theta) \quad \Rightarrow$$
$$-T_x = M\left[\ddot{s} + l(\sin\theta \cdot \dot{\theta}^2 - \cos\theta \cdot \ddot{\theta}\right)] \tag{5.21}$$

Na direção y:

$$-T_y - Mg = M\ddot{y}_c \quad \Rightarrow \quad -T_y - Mg = M\frac{d^2}{dt^2}(-l\cos\theta) \quad \Rightarrow$$
$$-T_y - Mg = Ml\left[\cos\theta \cdot \dot{\theta}^2 + \sin\theta \cdot \ddot{\theta}\right] \tag{5.22}$$

Para a modelagem da rotação em torno do centro de gravidade, inicialmente precisamos determinar o momento de inércia da barra. Como a massa está uniformemente distribuída ao longo do corpo, seu momento de inércia em torno de (x_c, y_c) é equivalente ao de duas massas pontuais localizadas a uma distância $l/2$ do centro de gravidade da barra, conforme indica a figura 5.30. Portanto, pela fórmula 5.17, o momento de inércia é de:

$$J = 2 \cdot \left(\frac{M}{2}\right)\left(\frac{l}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad J = \frac{Ml^2}{4}$$

Para modelar o movimento angular em torno do centro de gravidade, nota-se que a força peso não exerce nenhum torque, pois está aplicada diretamente no eixo de rotação.

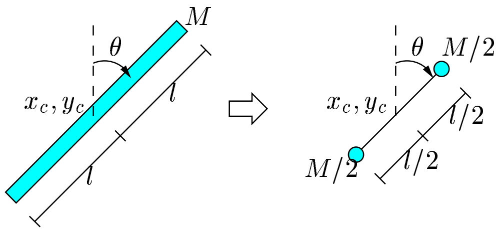


Figura 5.30: Momento de inércia de uma barra em torno do centro de gravidade

Levando-se em conta os torques gerados pelas componentes T_x e T_y :

$$\tau = J\ddot{\theta} \quad \Rightarrow \quad -\left(\frac{l}{2}\right) T_x \cos\theta + \frac{l}{2} T_y \sin\theta = \left(\frac{Ml^2}{4}\right)\ddot{\theta} \tag{5.23}$$

As equações 5.20, 5.21, 5.22 e 5.23 constituem o sistema de equações diferenciais que modela o dispositivo. Em razão do tipo de não-linearidade das equações, não se chega a uma equação única que modele o comportamento da variável s ou da variável θ. Linearizando-se estas equações em torno do ponto $\theta_{PO} = \dot{\theta}_{PO} = \ddot{\theta}_{PO} = 0$, chega-se a:

$$\begin{cases} m\ddot{s} + ks = T_x \\ -T_x = M\left(\ddot{s} - l\ddot{\theta}\right) \\ -T_y - Mg = 0 \\ -\left(\frac{l}{2}\right) T_x + \left(\frac{l}{2}\right) T_y\theta = \left(\frac{Ml^2}{4}\right)\ddot{\theta} \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} (m-M)\ddot{s} + ks + Ml\ddot{\theta} = 0 \\ m\ddot{s} + ks + \left(\frac{Ml}{2}\right)\ddot{\theta} - Mg\theta = 0 \end{cases} \tag{5.24}$$

O sistema de duas equações diferenciais lineares da equação 5.24 pode ser utilizado para calcular $\theta(t)$ e $s(t)$ a partir das condições iniciais. ■

5.4.2 Jogo ideal de engrenagens

O jogo ideal de engrenagens é formado por dois discos com massa desprezível e de raios r_1 e r_2, que giram sobre eixos fixos e se tocam sem que haja escorregamento entre eles[2]. O diagrama de um jogo ideal de engrenagens é dado na figura 5.31.

Como não há deslizamento relativo entre os discos, a velocidade linear dos dois pontos em contato na circunferência dos discos é igual em módulo:

$$v_1 = v_2 \quad \Rightarrow \quad \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2 \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)\omega_1 \tag{5.25}$$

Os discos das engrenagens têm massa desprezível, de forma que o torque resultante sobre eles é nulo. Se o torque τ_1 corresponde a uma força F_1 no ponto de contato, o

[2]Para evitar escorregamento, utilizam-se discos dentados ou materiais de alto coeficiente de atrito.

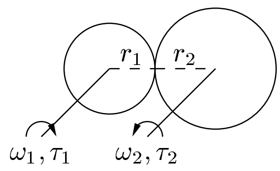


Figura 5.31: Diagrama de um jogo ideal de engrenagens

segundo disco exerce sobre o primeiro uma força de reação F_2 de mesmo valor e sentido contrário:

$$F_1 = F_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\tau_1}{r_1} = \frac{\tau_2}{r_2} \quad \Rightarrow \quad \tau_2 = \left(\frac{r_2}{r_1}\right) \tau_1 \tag{5.26}$$

Das equações 5.25 e 5.26, percebe-se que o equivalente elétrico de um jogo de engrenagens ideal é o transformador elétrico ideal, com a razão entre os raios fazendo o mesmo papel do inverso da razão entre o número de espiras, conforme indica a figura 5.32.

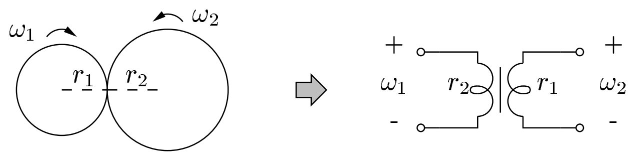


Figura 5.32: Equivalência entre engrenagens e transformadores elétricos

5.4.3 Pinhão-cremalheira e polia ideais

Estes dois dispositivos convertem movimentos rotacionais em translacionais, e vice-versa. Ambos se baseam em um disco girante (pinhão ou polia) de massa desprezível, em contato com um corpo (cremalheira ou correia) de massa também desprezível e em movimento linear. Os diagramas esquemáticos correspondentes estão indicados na figura 5.33.

Figura 5.33: Diagrama de uma cremalheira e de uma polia ideais

As equações que regem a conversão entre grandezas rotacionais e translacionais são:

$$x = r\theta \quad \Rightarrow \quad v = r\omega \tag{5.27}$$

$$\tau = rF \quad \Rightarrow \quad F = \left(\frac{1}{r}\right) \tau \tag{5.28}$$

Logo, estes dispositivos podem ser representados por um transformador elétrico onde as grandezas elétricas no primário são equivalentes a grandezas mecânicas rotacionais, as grandezas elétricas no secundário são equivalentes a grandezas mecânicas translacionais e o raio do disco desempenha o papel da razão entre o número de espiras, ou vice-versa. Esta equivalência está indicada na figura 5.34.

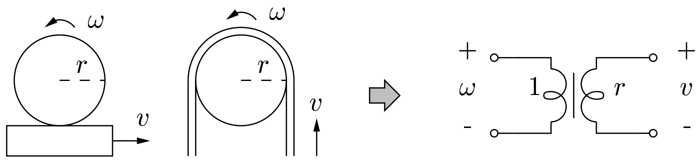


Figura 5.34: Equivalência entre cremalheira ou polias e transformadores elétricos

Exemplo 5.4-D:

Determine o circuito elétrico equivalente ao dispositivo esquematizado na figura 5.35. O momento de inércia J_1 representa o rotor de um motor em que um torque aplicado τ é exercido e que gira apoiado em um mancal com coeficiente de atrito viscoso β_1. O rotor é acoplado por um eixo rígido a um pinhão de raio r_1. A cremalheira do pinhão está rigidamente acoplada à massa M, que se movimenta sobre uma superfície com coeficiente de atrito viscoso b. A massa M e uma mola translacional de constante elástica k estão ligadas a cabos enrolados em torno de duas seções de um cilindro, com raios r_2 e $r3$ respectivamente. Supõe-se que os cabos não estiquem. O momento de inércia do cilindro é J_2. O coeficiente de atrivo viscoso entre o cilindro e a superfície do mancal que o apóia é β_2 . Calcule a função de transferência $G(s)$ entre o torque τ e o deslocamento x da massa.

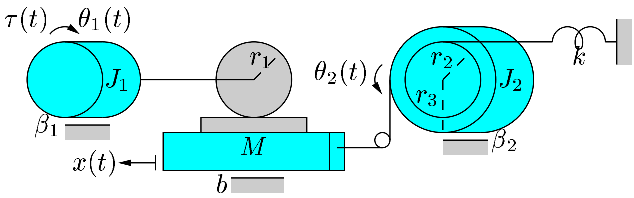


Figura 5.35: Dispositivo mecânico do exemplo 5.4-D

A figura 5.36 apresenta o equivalente elétrico deste sistema, inicialmente no domínio do tempo e em seguida com impedâncias no domínio da freqüência.

Os dispositivos podem ser transferidas de um lado para o outro dos transformadores utilizando-se os procedimentos da figura 5.6. Chega-se assim ao circuito equivalente da figura 5.37, que não contém transformadores. Daí, com todas as impedâncias em paralelo, é simples chegar-se à relação entre $T(s)$ e $V_x(s)$:

$$H(s) = \frac{V_x(s)}{T(s)} = \frac{r_1 r_3^2 s}{(r_3^2 J_1 + r_1^2 J_2 + r_1^2 r_3^2 M)s^2 + (r_3^2 \beta_1 + r_1^2 \beta_2 + r_1^2 r_3^2 b)s + r_1^2 r_2^2 k}$$

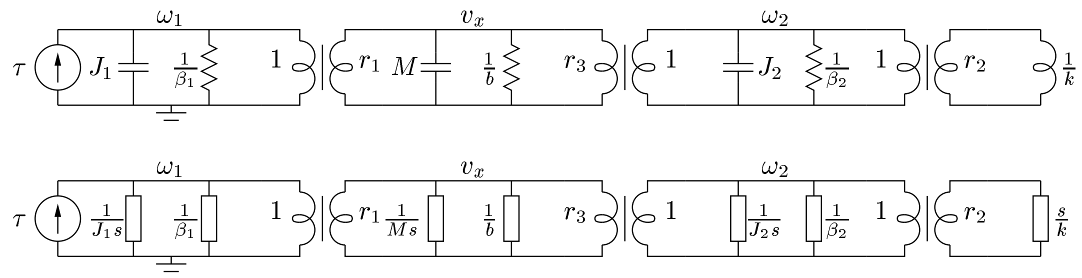


Figura 5.36: Equivalente elétrico do dispositivo da figura 5.35

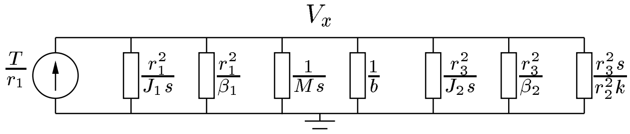


Figura 5.37: Circuito equivalente ao da figura 5.36 sem transformadores

Sabendo-se que $V_x(s) = sX(s)$, tem-se que:

$$H(s) = \frac{sX(s)}{T(s)} \quad \Rightarrow \quad G(s) = \frac{X(s)}{T(s)} = \frac{H(s)}{s} \quad \Rightarrow$$

$$G(s) = \frac{r_1 r_3^2}{(r_3^2 J_1 + r_1^2 J_2 + r_1^2 r_3^2 M)s^2 + (r_3^2 \beta_1 + r_1^2 \beta_2 + r_1^2 r_3^2 b)s + r_1^2 r_2^2 k}$$

que é a função de transferência desejada para o sistema. ■

5.5 Sistemas eletromecânicos

Sistemas eletromecânicos ideais são dispositivos que convertem energia elétrica em energia mecânica ou vice-versa (exemplo: motores, geradores, alto-falantes, etc.). Uma grande variedade de dispositivos eletromecânicos envolve o fluxo de correntes elétricas dentro de um campo magnético. Nesses casos, sabe-se que:

- um condutor em um campo magnético que carrega uma corrente terá uma força exercida sobre ele; e
- uma tensão será induzida em um condutor que se move com relação a um campo magnético.

A lei de indução de Faraday ($e = -d\lambda/dt$) descreve a indução de tensões por um campo magnético variando no tempo. A conversão eletromecânica de energia ocorre quando a mudança no fluxo é associada com um movimento mecânico. Em máquinas rotativas, as tensões são geradas nas bobinas através de uma das seguintes formas:

- gerando essas bobinas mecanicamente através de um campo magnético;
- mecanicamente girando um campo magnético que atravessa as bobinas; ou
- projetando o circuito magnético de forma que a relutância magnética varie com a rotação do motor.

Através de qualquer um desses métodos, o fluxo atravessando uma bobina específica é mudado ciclicamente e uma voltagem variando no tempo é gerada. Um grupo de tais bobinas interconectado de forma que suas tensões geradas se somem, provendo uma contribuiç Ao positiva ao resultado desejado, é chamado um enrolamento de armadura ou simplesmente armadura. A armadura de uma máquina de corrente contínua é o elemento rotativo ou rotor, enquanto a armadura de uma máquina de corrente alternada é o elemento estacionário ou estator. O circuito magnético é completado através do ferro do outro membro da máquina e bobinas de excitação ou enrolamento de campo são usados para agir como a fonte primária de fluxo.

As máquinas de corrente contínua (ou máquinas CC) são bastante utilizadas em sistemas de controle em razão do seu comportamento essencialmente linear. O diagrama esquemático de uma máquina CC é mostrado na figura 5.38. O enrolamento de campo tem resistência R_f e indutância L_f e o enrolamento de armadura tem resistência R_a e indutância L_a . As correntes e tensões nos enrolamentos de campo e de armadura são i_f e v_f e i_a e v_a, respectivamente. A tensão induzida na armadura é v_g. O torque e a velocidade angular no eixo do rotor são τ e ω, respectivamente.

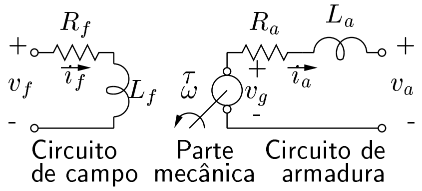


Figura 5.38: Diagrama esquemático de uma máquina de corrente contínua

A tensão induzida no enrolamento de armadura é dada por:

$$v_g = K_1 \phi \omega \tag{5.29}$$

e o torque da máquina é dado por:

$$\tau = K_1 \phi i_a \tag{5.30}$$

onde K_1 é um parâmetro determinado pela estrutura física da máquina e ϕ é o fluxo magnético. Supondo que a máquina esteja operando na zona linear (ou seja, que o núcleo não esteja saturado), o fluxo é dado pela equação 5.1, ou seja:

$$\phi = \frac{\mu N_f A}{l_f} i_f = k_2 i_f \tag{5.31}$$

onde a constante K_2 depende das características magnéticas do núcleo e do enrolamento de campo. Em algumas máquinas CC de pequenas dimensões, o enrolamento de campo é suprimido e um imã permanente é utilizado para gerar o fluxo magnético.

Vendo de uma forma unificada, a máquina CC pode ser vista como um dispositivo a três pares de terminais: dois elétricos (os enrolamentos de campo e de armadura) e um mecânico (o eixo de rotação). Dependendo dos sinais presentes nestes terminais, as máquinas CC podem ser utilizadas como geradores, em que potência mecânica é fornecida para gerar potência elétrica, ou como motores, quando potência elétrica é consumida para gerar potência mecânica.

5.5.1 Gerador CC

No gerador CC, a velocidade ω é mantida constante, a tensão v_f é o sinal de entrada e a tensão v_a, o sinal de saída, conforme a figura 5.39. Consideramos que um gerador é acionado por uma fonte primária de energia mecânica (por exemplo, o fluxo d'água em uma turbina hidroelétrica). Esta fonte possui capacidade suficiente para conseguir manter constante a velocidade de rotação do rotor ω sem ser afetada pela carga elétrica do gerador.

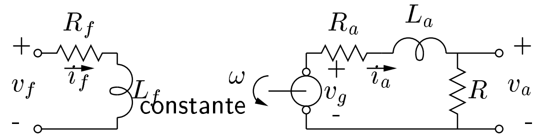


Figura 5.39: Diagrama esquemático de um gerador CC

A equação para o circuito de campo é:

$$v_f = R_f i_f + L_f \frac{di_f}{dt}$$

Das equações 5.29 e 5.31, a tensão induzida na armadura é:

$$v_g = K_1 \phi \omega = \overbrace{K_1 K_2 \omega}^{\text{constante}} i_f = K_g i_f$$

Aplicando-se a transformada de Laplace a estas duas equações, supondo condições iniciais nulas, tem-se:

$$\begin{cases} V_f = (R_f + L_f s) I_f \\ V_g = K_g I_f \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{V_g(s)}{V_f(s)} = \frac{K_g}{L_f s + R_f} \tag{5.32}$$

A equação 5.32 relaciona a tensão V_g induzida na armadura com a tensão V_f aplicada no campo. Para determinar a relação entre V_f e a tensão V_a efetivamente gerada no circuito de armadura, é necessario conhecer a carga que está conectada ao gerador. Por exemplo, suponha que o gerador está alimentando uma carga resistiva de resistência R, conforme indicado na figura 5.39. O equivalente elétrico corresponde a esta situação é mostrado na figura 5.40.

Por análise do circuito da figura 5.40 chega-se a:

$$\begin{cases} V_g = (R_a + L_a s + R) I_a \\ V_a = R I a \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{V_a(s)}{V_g(s)} = \frac{R}{L_a s + R_f + R} \tag{5.33}$$

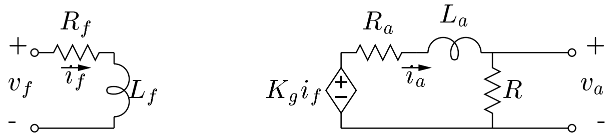


Figura 5.40: Equivalente elétrico de um gerador CC

Combinando-se as equações 5.32 e 5.33, tem-se:

$$\frac{V_a(s)}{V_f(s)} = \frac{V_a(s)}{V_g(s)} \cdot \frac{V_g(s)}{V_f(s)} \quad \Rightarrow \quad \frac{V_a(s)}{V_f(s)} = \frac{K_g R}{(L_f s + R_f)(L_a s + R_f + R)} \tag{5.34}$$

A função de transferência de segunda ordem da equação 5.34 permite calcular a tensão de saída v_a em função da tensão no campo v_f.

5.5.2 Motor CC

Nos motores, potência mecânica é gerada, de forma que a velocidade de rotação ω é o sinal de saída e a tensão aplicada é o sinal de entrada. De acordo com sinal elétrico de entrada, temos o motor CC *controlado pela armadura* ou o motor CC *controlado pelo campo*.

Motor CC controlado pela armadura

Nesta situação, a corrente de campo i_f é mantida constante, o que pode ser conseguido alimentando-se o circuito de campo com uma tensão constante. A tensão de armadura v_a é o sinal de entrada. Para exemplificar, suporemos que a carga pode ser modelada por um momento de inércia J e um atrito viscoso de coeficiente b, conforme a figura 5.41.

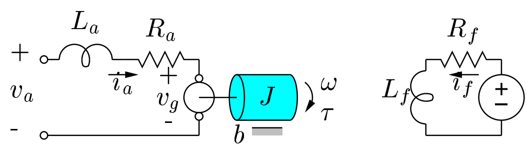


Figura 5.41: Diagrama esquemático de um motor CC controlado pela armadura

Das equações 5.29, 5.30 e 5.31:

$$v_g = K_1 \phi \omega = \overbrace{K_1 K_2 i_f}^{\text{constante}} \omega = K_m \omega \qquad \tau = K_1 \phi i_a = \overbrace{K_1 K_2 i_f}^{\text{constante}} i_a = K_m i_a$$

A constante K_m é conhecida como *constante do motor*. Note que estas relações entre grandezas são similares às de um transformador elétrico, o que permite modelar o motor CC controlado pela armadura através de um circuito equivalente, conforme a figura 5.42.

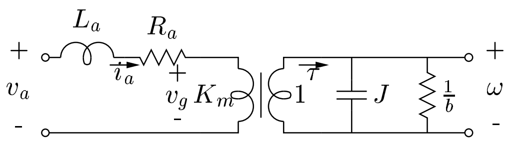


Figura 5.42: Equivalente elétrico de um motor CC controlado pela armadura

Do circuito da figura 5.42, extrai-se facilmente a função de transferência entre a tensão de armadura aplicada v_a e a velocidade ω de rotação do motor:

$$\frac{\Omega(s)}{V_a(s)} = \frac{K_m}{JL_a s^2 + (JR_a + BL_a)s + BR_a + K_m^2}$$

Como na prática usualmente a impedância da armadura pode ser desprezada ($L_a \to 0$), tem-se que:

$$\frac{\Omega(s)}{V_a(s)} = \frac{K_m}{JR_a s + BR_a + K_m^2} = \frac{K}{T_m s + 1} \tag{5.35}$$

Portanto, o motor CC controlado pela armadura pode ser aproximadamente descrito em termos de uma função de transferência de primeira ordem que relaciona a tensão de armadura aplicada com a velocidade de rotação gerada. A equação 5.35 também modela os motores CC a imã permanente, onde não existe enrolamento de campo.

A maior dificuldade encontrada ao se controlar motores CC pela armadura é a amplitude elevada da corrente de armadura, o que requer a utilização de um sinal v_a de entrada fornecido por uma fonte de alta potência.

Motor CC controlado pelo campo

Esta forma de utilização das máquinas CC pressupõe uma corrente de armadura constante. Isto não pode ser conseguido alimentando-se a armadura com uma tensão constante, devido à tensão induzida na armadura. Por isso, uma máquina CC controlada pelo campo requer uma fonte de corrente para alimentar o circuito de armadura, o que constitui a maior dificuldade para este tipo de utilização das máquinas CC.

O sinal de entrada é a tensão de campo v_f, que normalmente pode ser fornecido por uma fonte de baixa potência. Para exemplificar, suporemos que a carga pode ser modelada por um momento de inércia J e um atrito viscoso de coeficiente b, conforme a figura 5.43.

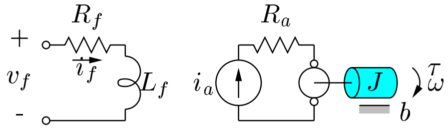


Figura 5.43: Diagrama esquemático de um motor CC controlado pelo campo

Das equações 5.30 e 5.31:

$$\tau = K_1\phi i_a = \overbrace{K_1K_2i_a}^{\text{constante}} i_f = K'_m i_f$$

Esta relação permite modelar o motor CC controlado pelo campo através do circuito equivalente da figura 5.44. A obtenção da função de transferência é praticamente imediata a partir da análise do circuito:

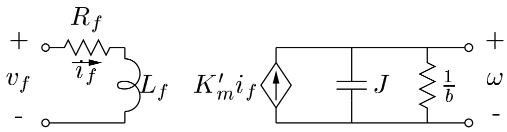


Figura 5.44: Equivalente elétrico de um motor CC controlado pelo campo

$$\frac{\Omega(s)}{V_a(s)} = \frac{K'_m}{(L_f s + R_f)(Js + b)} \tag{5.36}$$

Portanto, o motor CC controlado pelo campo pode ser descrito em termos de uma função de transferência de segunda ordem.

Tendo em vista o custo relativamente elevado da fonte de corrente constante de alta potência necessária ao funcionamento do motor CC controlado pelo campo, esta configuração é bem menos utilizada que a configuração controlada pela armadura. Além disso, o principal incoveniente do controle pela armadura, que é a alta corrente de entrada, pode ser contornado com o uso de outra máquina CC, como mostra o exemplo da figura 5.5-A.

Exemplo 5.5-A: Sistema Ward-Leonard

O sistema Ward-Leonard é utilizado para regular a velocidade de um motor de corrente contínua. O sistema, cujo esquema é apresentado na figura 5.45, consta de um gerador de corrente contínua, com excitação independente, acionado por um dispositivo que provê velocidade angular constante. A saída deste gerador alimenta a armadura de um motor de corrente contínua com corrente de campo constante. A carga do motor é composta por um momento de inércia J e um amortecedor viscoso de coeficiente de atrito b. A velocidade ω do motor é a grandeza controlada, sendo que o controle se faz variando a tensão v_f aplicada ao campo do gerador. Deduza a função de transferência entre ω e v_f.

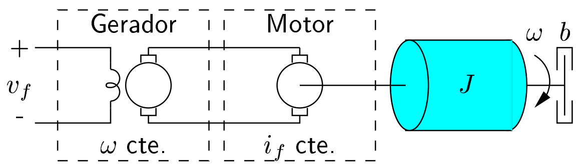


Figura 5.45: Sistema Ward-Leonard de máquinas CC do exemplo 5.5-A

O equivalente elétrico deste sistema é mostrado na figura 5.46. Fazendo-se $R_a = R_{a1} + R_{a2}$ e $L_a = L_{a1} + L_{a2}$, aplicando-se a transformada de Laplace e percorrendo-se as malhas do circuito chega-se a:

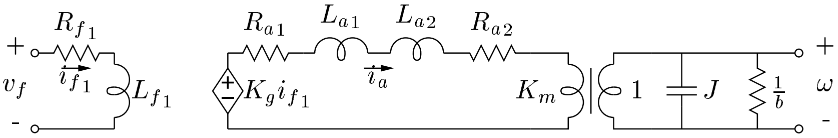


Figura 5.46: Equivalente elétrico do sistema Ward-Leonard da figura 5.45

$$\begin{cases} V_f = (L_{f1}s + R_{f1})I_{f1} \\ K_g I_{f1} = (L_a s + R_a)I_a + K_m\Omega \\ K_m I_a = (Js + b)\Omega \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{\Omega(s)}{V_f(s)} = \frac{K_g K_m}{(L_{f1}s + R_{f1})[(L_a s + R_a)(Js + b) + K_m^2]}$$

Esta função de transferência de ordem três se reduz a uma função de transferência de segunda ordem se a soma das impedâncias de armadura L_a puder ser desprezada. ■

Exemplo 5.5-B: Robô móvel de movimento linear

A figura 5.47 esquematiza um robô móvel de massa M e com duas rodas idênticas de raio r_r e momento de inércia J_r que estão acopladas a um mesmo eixo. O eixo é acionado, através de duas engrenagens de raio r_1 e r_2 e momento de inércia desprezível, por uma tensão e aplicada em um motor CC de imã permanente, com impedância de armadura desprezível, resistência de armadura R_a, constante de motor K_m e momento de inércia do rotor J_m. Os atritos do rotor e do eixo com seus mancais de apoio têm coeficientes de atrito viscoso β_m e β_r, respectivamente. O arrasto do robô com o chão é modelado por um atrito viscoso de coeficiente b. Determine o equivalente elétrico do robô.

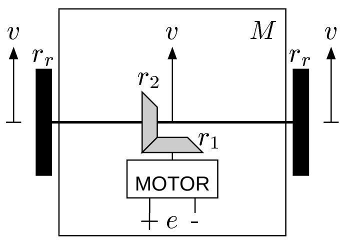


Figura 5.47: Robô móvel do exemplo 5.5-B

O equivalente elétrico do robô é mostrado na figura 5.48. Um primeiro transformador modela a conversão eletromecânica de energia do motor; o segundo, o jogo de engrenagens, enquanto o terceiro modela o efeito de transformação de movimento angular em linear feito pelas rodas. As tensões ω_m e ω_r modelam as velocidades angulares de rotação do motor e do eixo das rodas, respectivamente. A tensão v é equivalente à velocidade linear no raio externo das rodas, que neste caso corresponde à velocidade linear do robô.

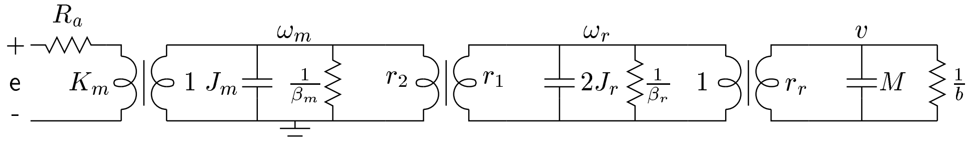


Figura 5.48: Equivalente elétrico do robô da figura 5.47

Esta modelagem supõe que o movimento do robô será puramente linear. Isto só será verdade se as duas rodas tiverem raios absolutamente idênticos: qualquer discrepância gerará um movimento de rotação. ■

Exemplo 5.5-C: Robô móvel de movimento angular

Refaça a modelagem do robô do exemplo 5.5-B, supondo agora que as duas rodas estão acopladas a eixos distintos mas acionados pelo mesmo motor através de engrenagens em contrafase[3], conforme o esquema da figura 5.49. O robô tem largura d do centro à roda, momento de inércia J e um coeficiente angular de atrito β ao girar sobre o solo.

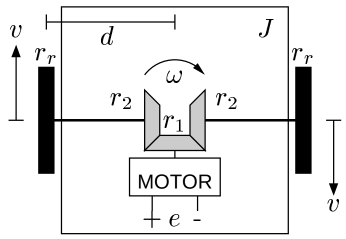


Figura 5.49: Robô móvel do exemplo 5.5-C

O equivalente elétrico do robô é mostrado na figura 5.50. Os três primeiros transformadores e as tensões ω_m e ω_r têm o mesmo significado que no exemplo 5.5-B. A tensão v continua representando a velocidade linear no raio externo das rodas, porém com sentido diferente em cada uma delas, conforme a figura 5.49, e portanto não mais corresponde à velocidade linear do centro de massa do robô.

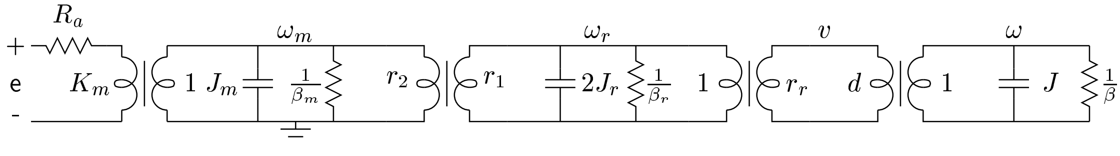


Figura 5.50: Equivalente elétrico do robô da figura 5.49

Qualquer assimetria nas rodas ou nas engrenagens fará com que o movimento não seja mais puramente rotacional, passando a ter também uma componente translacional. ■

[3]Duas engrenagens em contrafase giram com a mesma velocidade em direções contrárias.

Exemplo 5.5-D: Robô móvel com movimento linear e angular

Um robô mais realístico é ilustrado na figura 5.51. Cada roda é acionada diretamente por um motor, o que faz com que o veículo possa executar movimentos translacionais e rotacionais. Determine o equivalente elétrico (multivariável) que relaciona as tensões de entrada e_d e e_e com a velocidade linear v e angular ω do robô.

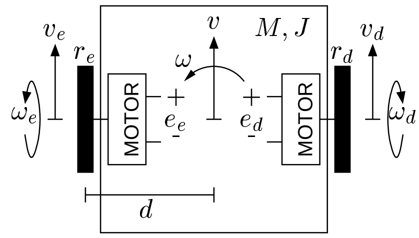


Figura 5.51: Robô móvel do exemplo 5.5-D

Antes de passar à obtenção do equivalente elétrico completo do robô, é preciso estabelecer a correspondência entre as velocidades expressas nas coordenadas próprias do robô (v e ω) e as velocidades nas rodas (v_e e v_d), bem como entre a força gerada nas rodas (F_d e F_e) e as grandezas correspondentes no centro de massa do robô (força F e torque τ).

Se o robô tivesse apenas velocidade linear v, a velocidade linear em qualquer um dos seus pontos, inclusive nas rodas, seria igual a v ($v_d = v$, $v_e = v$). Se o robô tivesse apenas velocidade angular ω, o módulo da velocidade linear nas rodas seria igual ao produto da velocidade angular pela distância das rodas ao centro de massa ($v_d = \omega d$, $v_e = -\omega d$). Combinando-se estes dois efeitos, por aplicação do teorema da superposição, chega-se à relação final entre as velocidades:

$$v_d = v + \omega d \qquad\qquad v_e = v - \omega d$$

Se os motores fazem com que sejam aplicadas nas rodas do robô as forças F_d e F_e, a força total sobre o corpo será a soma das forças e o torque total será o somatório dos torques produzidos por cada uma das forças:

$$F = F_d + F_e \qquad\qquad \tau = F_d d - F_e d$$

O veículo pode portanto ser visto como uma espécie de transformador com dois pares de terminais de entrada e dois pares de terminais de saída, conforme indica a figura 5.52. Como se espera de um dispositivo de transformação, que não dissipa nem absorve energia, a potência na entrada é igual à potência na saída ($F_d v_d + F_e v_e = Fv + \tau\omega$).

Uma vez estabelecida esta equivalência entre grandezas, basta que se acrescente a representação dos motores e do corpo do robô. O equivalente elétrico completo do sistema pode ser visto na figura 5.53. O momento de inércia J_d representa a soma dos momentos de inércia do rotor do motor direito e da roda direita; o coeficiente de atrito viscoso angular β_d representa a soma dos coeficiente de atrito do rotor direito e da roda direita com seus respectivos mancais. R_{ad} e K_{md} são a resistência de armadura e o ganho do motor direito.

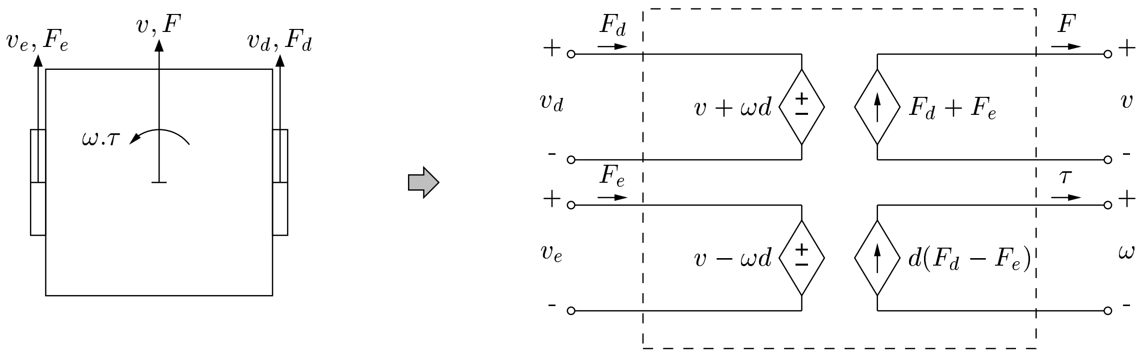


Figura 5.52: Equivalência entre velocidades nas rodas e no centro de massa

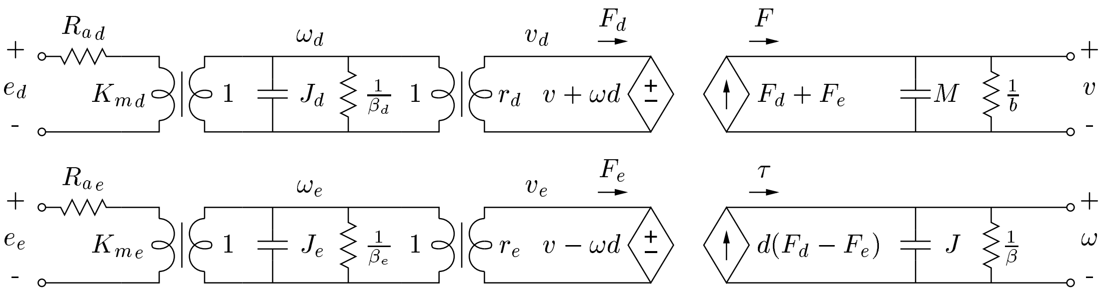


Figura 5.53: Equivalente elétrico do robô da figura 5.51

r_d é o raio da roda direita. O mesmo acontece com as grandezas referentes ao motor esquerdo, J_e, β_e, R_{ae}, K_{me} e r_e. M e J são a massa e o momento de inércia do robô e b e β são os coeficientes de atrito viscoso linear e angular do robô com o solo. ■

5.6 Sistemas fluídicos

Os sistemas fluídicos, envolvendo fluxos de líquidos ou gases, não são particularmente adequados para serem representados por modelos lineares a parâmetros concentrados em razão dos seguintes fatores:

1. as grandezas envolvidas, como temperatura e pressão, são eminentemente distribuídas, e não concentradas;
2. muitos casos de escoamentos de líquidos são regidos por equações não-lineares; e
3. o fenômeno de compressão dos gases é regido por equações não-lineares.

Em razão destes fatores, vamos restringir nossa análise dos sistemas fluídicos a algumas situações onde a análise através de equações lineares é razoavelmente precisa. Trataremos essencialmente dos casos envolvendo líquidos incompressíveis, escoando através de recipientes e tubulações de seção transversal constante.

A capacitância fluídica é o termo usado para descrever a capacidade de um fluido armazenar energia sob a forma de energia potencial. Em um reservatório de seção transversal constante, como o esquematizado na figura 5.54, supõe-se um fluxo de fluido sendo admitido de vazão $q(t)$. Durante um pequeno intervalo de tempo Δt, este fluxo pode ser considerado aproximadamente constante, de forma que o volume adicional de fluido ΔV que entrou no reservatório é dado por:

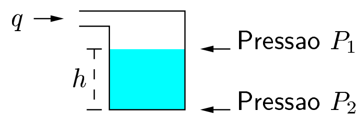


Figura 5.54: Capacitância fluídica em recipiente com fluido incompressível

$$\Delta V \simeq q(t)\Delta t \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{\Delta V}{\Delta t}\right|_{\Delta t \to 0} = q(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{dV}{dt} = q(t)$$

Se o recipiente tem seção transversal constante e de área A, o volume de fluido é:

$$V(t) = A \cdot h(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{dV}{dt} = A\frac{dh}{dt} \quad \Rightarrow \quad q(t) = A\frac{dh}{dt} \tag{5.37}$$

Em razão das pressões P_1 e P_2, são exercidas forças sobre o fluido no recipiente, forças iguais ao produto da pressão pela área:

$$F_1 = P_1 A \qquad F_2 = P_2 A$$

Também atua sobre o fluido a força peso P, no mesmo sentido da força F_1. Se ρ é a massa específica (ou densidade) do fluido, então:

$$P = mg = \rho V g = \rho A h g$$

Como o bloco de fluido tem aceleração vertical nula, o somatório das forças deve ser nulo:

$$F_1 + P = F_2 \quad \Rightarrow \quad P_1 A + \rho A g h = P_2 A \quad \Rightarrow \quad h(t) = \left(\frac{1}{\rho g}\right) P_{21}(t) \tag{5.38}$$

onde $P_{21} = P_2 - P_1$ é a diferença de pressão no recipiente. Substituindo-se a equação 5.38 na equação 5.37, chega-se a:

$$q(t) = C_f \frac{dP_{21}}{dt} \qquad \text{onde} \qquad C_f = \frac{A}{\rho g} \tag{5.39}$$

A grandeza C_f é denominada capacitância fluídica do reservatório, em razão da similaridade entre a equação 5.39 e a equação de um capacitor elétrico ($i = C \cdot dV/dt$).

Para a determinação da indutância fluídica, considere um bloco de líquido em movimento, conforme a figura 5.55, supondo todas as partículas do fluido com a mesma

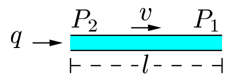


Figura 5.55: Indutância fluídica em tubulação com fluido incompressível

velocidade v e que a tubulação tem seção transversal constante de área A. Em razão das pressões P_1 e P_2 , são exercidas forças sobre o fluido no recipiente, forças essas dadas por:

$$F_2 = P_2 A \qquad F_1 = P_1 A$$

Aplicando-se a lei de Newton ao bloco de fluido:

$$F = m \cdot a \quad \Rightarrow \quad F_2 - F_1 = \rho l A \frac{dv}{dt} \quad \Rightarrow \quad P_2 - P_1 = \rho l \frac{dv}{dt} \quad \Rightarrow \quad P_{21} = \rho l \frac{dv}{dt} \qquad (5.40)$$

onde $P_{21} = P_2 - P_1$ é a diferença de pressão. Sabe-se que a vazão q em uma tubulação é dada por:

$$q = Av \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = \left(\frac{1}{A}\right)\frac{dq}{dt} \qquad (5.41)$$

Substituindo-se a equação 5.41 na equação 5.40, chega-se a:

$$P_{21}(t) = L_f \frac{dq}{dt} \qquad \text{onde} \qquad L_f = \frac{\rho l}{A} \qquad (5.42)$$

A grandeza $L_f = \frac{\rho l}{A}$ é denominada indutância fluídica do reservatório, em razão da similaridade entre a equação 5.42 e a equação que define o comportamento de um indutor elétrico ($v = L\frac{di}{dt}$). A indutância fluídica geralmente pode ser desconsiderada na análise se a vazão não variar bruscamente ($\frac{dq}{dt} \to 0$) ou se as tubulações forem curtas ($l \to 0$).

Antes de se definir a resistência fluídica, é importante que seja apresentado o Teorema de Bernoulli. Considere o escoamento em regime estacionário de um fluido não-viscoso e incompressível através de uma tubulação, conforme mostrado na figura 5.56. O trecho mostrado de tubulação tem diferentes seções transversais em seu início e seu término (A_1 e A_2, respectivamente). Os trechos de área A_1 e A_2 encontram-se em diferentes alturas (h_1 e h_2, respectivamente). Na parte inicial da tubulação a pressão é P_1 e a velocidade média é v_1; na parte final a pressão é P_2 e a velocidade média é v_2.

O trabalho de uma força é igual ao produto da força pelo deslocamento realizado:

$$W = Fd$$

Na figura 5.56, desprezando-se os atritos, as forças que realizam trabalho sobre o sistema são as forças de pressão $F_1 = P_1 A_1$ e $F_2 = P_2 A_2$, que atuam nas extremidades da tubulação, e a força da gravidade.

Enquanto o fluido escoa através do tubo, o efeito resultante é o transporte de uma porção de fluido representada pela área hachurada, que se move no início da tubulação, empurra o fluido e faz surgir movimento no fim da tubulação. Pode-se determinar o trabalho realizado pelas forças da seguinte forma:

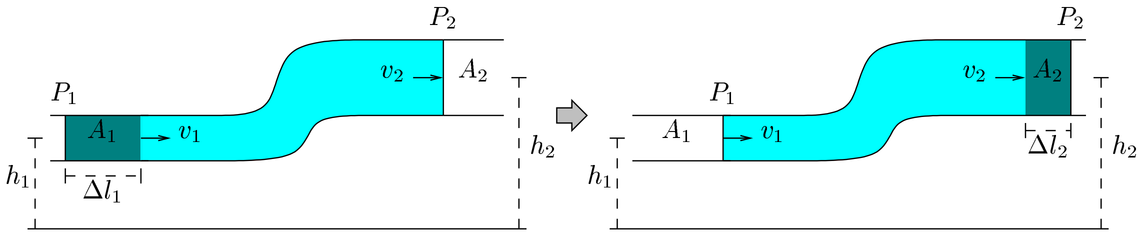


Figura 5.56: Escoamento de um fluido através de uma tubulação de área e altura variáveis

- o trabalho realizado pela força de pressão F_1 é $W1 = P_1 A_1 \Delta l_1$;
- o trabalho realizado pela força de pressão F_2 é $W2 = P_2 A_2 \Delta l_2$ (o sinal negativo indica que a força se opõe ao deslocamento); e
- o trabalho realizado pela força peso está associado à elevação da porção de fluido representada pela área hachurada desde a altura h_1 até a altura h_2. Esse trabalho vale $W_g = -mg(h_2 - h_1)$, onde m corresponde à massa da porção de fluido.

O trabalho W realizado sobre o sistema pela força resultante é dado por:

$$W = W_1 + W_2 + W_g = P_1 A_1 \Delta l_1 - P_2 A_2 \Delta l_2 - mg(h_2 - h_1)$$

Mas $A_1 \Delta l1 = A_2 \Delta l2$ equivale ao volume da porção de fluido representado pela área hachurada, que pode ser expresso por m/ρ, sendo ρ a densidade do fluido. Assim:

$$W = (P_1 - P_2)\frac{m}{\rho} - mg(h_2 - h_1) \tag{5.43}$$

O teorema do trabalho-energia estabelece que o trabalho realizado pela resultante das forças que atuam em um sistema é igual à variação de energia cinética do sistema. A variação de energia cinética do elemento de fluido é:

$$W = \Delta E_c = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} \tag{5.44}$$

Igualando-se as equações 5.43 e 5.44, chega-se a:

$$(P_1 - P_2)\frac{m}{\rho} - mg(h_2 - h_1) = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} \quad \Rightarrow$$

$$P_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} - \rho g h_1 = P_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} - \rho g h_2 \tag{5.45}$$

Como os índices 1 e 2 na equação 5.45 se referem a duas posições quaisquer, pode-se extender sua validade para toda a tubulação e escrever:

$$P + \rho v^2 - \rho g h = \text{constante}$$

Esta é a equação de Bernoulli para escoamento estacionário, com fluido incompressível e não-viscoso, publicada em 1738.

Existe uma relação definida entre a velocidade do fluido e a pressão diferencial em qualquer dispositivo gerador de queda de pressão. Tendo deduzido o teorema de Bernoulli, busca-se agora deduzir esta equação de vazão correspondente a perdas de carga localizadas (concentradas) e distribuídas, a fim de se determinar os valores da resistência fluídica.

5.6.1 Perdas concentradas

A dedução a seguir será voltada para o caso das perdas de carga localizadas causadas por restrições na linha. O estrangulamento, correspondente a uma mudança na área transversal de passagem do fluido, é exemplificado na figura 5.57.

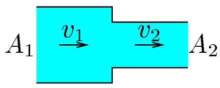


Figura 5.57: Estrangulamento em uma tubulação

Partindo-se da equação 5.45 e assumindo-se que o estrangulamento está em posição horizontal ($h_1 = h_2$), resulta:

$$P_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = P_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v_2^2 - v_1^2 = \frac{2(P_1 - P_2)}{\rho} = \frac{2P_{12}}{\rho} \tag{5.46}$$

Como não há perda de fluido, a vazão q nos dois lados da restrição é a mesma:

$$q = v_1 A_1 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{q}{A_1} \tag{5.47}$$

$$q = v_2 A_2 \quad \Rightarrow \quad v_2 = \frac{q}{A_2} \tag{5.48}$$

Substituindo-se as equações 5.47 e 5.48 na equação 5.46:

$$\frac{q^2}{A_2^2} - \frac{q^2}{A_2^2} = \frac{2P_{12}}{\rho} \quad \Rightarrow \quad P_{12} = \left[\rho\left(\frac{A_1^2 - A_2^2}{2A_1^2 A_2^2}\right)\right] q^2 \quad \Rightarrow$$

$$P_{12} = R_f q^2 \tag{5.49}$$

A equação 5.49 é puramente teórica, principalmente pelos seguintes motivos:

- ao contrário do que foi suposto na dedução, as velocidades nas seções 1 e 2 não são uniformemente distribuídas e iguais a v_1 e v_2, respectivamente;
- há uma diferença entre a área real do orifício A_2 e a área ainda menor onde efetivamente ocorre escoamento (denominada *vena contracta*); e
- parte da energia é perdida devido à turbulência no fluido.

Um coeficiente de descarga C geralmente é incluído para levar em consideração estes fatores. O coeficiente de descarga, que é um número menor que 1, é definido como sendo a relação entre a vazão real (q_r) e a vazão teórica (q_t):

$$C = \frac{q_r}{q_t}$$

Com isso, o valor real da resistência fluídica R_f é:

$$R_f = \frac{\rho}{C}\left(\frac{A_1^2 - A_2^2}{2A_1^2 A_2^2}\right)$$

Os valores do coeficiente de descarga são o resultado de estudos experimentais realizados para os diversos tipos de restrição usualmente empregados. Na prática da engenharia de controle, ao invés de se determinar experimentalmente o coeficiente de descarga C para em seguida se calcular a resistência fluídica R_f, se parte logo para a determinação experimental do valor final da resistência fluídica.

Praticamente todas as demais situações de escoamento através de singularidades (curvas, cotovelos, orifícios, entrada e saída de tubulações em vasos, filtros, etc.) são regidas por equações similares à equação 5.49, onde a queda de pressão é proporcional ao quadrado da vazão e o valor da constante R_f varia de caso a caso de acordo com o tipo de restrição, geralmente sendo determinada experimentalmente.

A equação 5.49 define a relação entre a queda de pressão e a vazão em uma restrição, com a constante R_f fazendo o papel da *resistência fluídica* da restrição. Ao contrário da equação correspondente para sistemas elétricos, que é a lei de Ohm ($v = Ri$), a equação 5.49 é uma equação não-linear, o que faz com que não haja uma equivalência direta entre a resistência fluídica e a resistência elétrica para este tipo de perda de carga.

Para contornar esta dificuldade, geralmente se trabalha com uma versão desta equação linearizada em torno de uma vazão média q_{PO}:

$$P = R_f q^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta P = \overline{R}_f \Delta q \qquad \text{onde} \qquad \begin{cases} \Delta q = q - q_{PO} \\ \Delta P = P - P_{PO} = P - R_f q_{PO}^2 \\ R_f = 2R_f q_{PO} \end{cases} \tag{5.50}$$

A equação linearizada 5.50 é a equivalente à lei de Ohm para sistemas fluídicos.

5.6.2 Perdas distribuídas

Antes de definir a resistência fluídica, devem ser apresentados os conceitos de escoamento laminar e escoamento turbulento. No escoamento laminar, as moléculas de fluido se movem com velocidades aproximadamente paralelas às paredes do duto, enquanto que no escoamento turbulento as moléculas se movem em todas as direções. A figura 5.58 apresenta os perfis de velocidade do fluido na tubulação para estes dois tipos de escoamento (em “V” para o laminar e em frente reta para turbulento).

Figura 5.58: Perfis de velocidade em escoamentos laminares e turbulentos

A caracterização do tipo de escoamento pode ser feita usando o número de Reynolds (R_e), que é um valor adimensional que permite saber se um escoamento é laminar ou turbulento. O escoamento é laminar se $R_e < 1100$ e turbulento se $R_e > 3500$. O número de Reynolds é dado por:

$$R_e = \frac{\rho \cdot d \cdot v}{\mu} \tag{5.51}$$

onde:

ρ: massa específica (densidade) do fluido;
d: diâmetro interno da tubulação;
v: velocidade média do fluido na tubulação; e
μ: viscosidade absoluta do fluido.

A principal perda distribuída nos sistemas de controle fluídicos diz respeito aos escoamentos através de trechos retos de tubulação com seção tranversal constante. A comprovação experimental permite deduzir equações para três situações distintas:

- Escoamento turbulento em tubos rugosos: $P_{12} = R_f q^2$
- Escoamento turbulento em tubos lisos: $P_{12} = R_f q^{1.75}$
- Escoamento laminar ou através de meio poroso: $P_{12} = R_f q$

É importante notar que a relação entre queda de pressão e vazão é linear para escoamentos laminares, como no caso de um tubo capilar [4] ou escoamentos lentos. Para escoamentos laminares em dutos, a resistência fluídica é dada por

$$R_f = \frac{128 l \mu}{\pi d^4}$$

onde:

d: diâmetro interno da tubulação;
l: comprimento do trecho reto da tubulação; e
μ: viscosidade absoluta do fluido.

5.6.3 Equivalência com circuitos elétricos

Os circuitos equivalentes elétricos correspondentes aos sistemas fluídicos linearizados podem ser obtidos respeitando-se as equivalências indicadas na tabela 5.4.

Sistema fluídico	**Sistema elétrico**
Pressão P	Tensão v
Vazão q	Corrente i
Capacitância fluídica C_f	Capacitor C_f
Resistência fluídica linearizada $\overline{R}_f$	Resistor R_f
Indutância fluídica L_f	Indutor L_f

Tabela 5.4: Equivalência entre sistemas fluídicos e sistemas elétricos

[4] Um tubo capilar é um duto de diâmetro bastante reduzido.

Exemplo 5.6-A: Tanque com escoamento livre

Seja o tanque de seção transversal constante mostrado na figura 5.59. As vazões de entrada e de saída de um fluido incompressível no recipiente são q_i e q_o, respectivamente, sendo a vazão de entrada imposta por uma bomba externa. A resistência fluídica R_f modela a perda de carga no orifício de saída. O comprimento da tubulação de saída é suficientemente pequeno para que a indutância fluídica possa ser desprezada. Determine a relação entre a altura da coluna de fluido h e a vazão de entrada q_i.

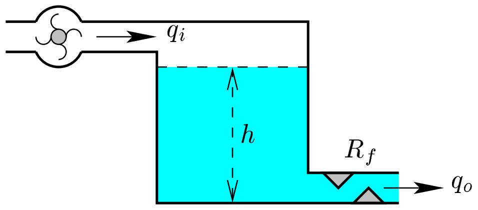


Figura 5.59: Tanque com escoamento livre do exemplo 5.6-A

O equivalente elétrico do sistema é mostrado na figura 5.60. A tensão no nó corresponde à pressão P no fundo do recipiente e a tensão de referrência ("terra") corresponde à pressão atmosférica. A relação entre P e q_i pode ser estabelecida a partir da análise do circuito:

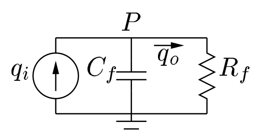


Figura 5.60: Equivalente elétrico do tanque com escoamento livre da figura 5.59

$$\begin{cases} q_i = q_c + q_o \\ q_c = C_f(dP/dt) \\ q_o = \sqrt{P/R_f} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad C_f\dot{P} + \left(\frac{1}{\sqrt{R_f}}\right)\sqrt{P} = q_i$$

A partir das equações 5.38 e 5.39, sabe-se que:

$$C_f = \frac{A}{\rho g} \qquad P = \rho g h \quad \Rightarrow \quad A\dot{h} + \left(\sqrt{\frac{\rho g}{R_f}}\right)\sqrt{h} = q_i$$

Uma versão linearizada desta equação pode ser obtida caso se utilize a equação 5.50 (e não a equação 5.49) para a determinação do fluxo de saída q_o em função da pressão P. ■

Exemplo 5.6-B: Dois tanques interligados

Obtenha circuitos elétricos equivalentes aos dois sistemas fluídicos com tanques interligados da maneira apresentada na figura 5.61.

A grande diferença entre os dois sistemas é que, no sistema (a), o fluxo q_1 se dá entre um ponto sujeito à pressão P_1 e a pressão P_2, correspondentes às pressões no fundo dos dois recipientes, respectivamente. Já no sistema (b), o fluxo q_1 se dá entre um ponto sujeito à pressão P_1 e a pressão atmosférica, de maneira similar ao sistema da figura 5.59.

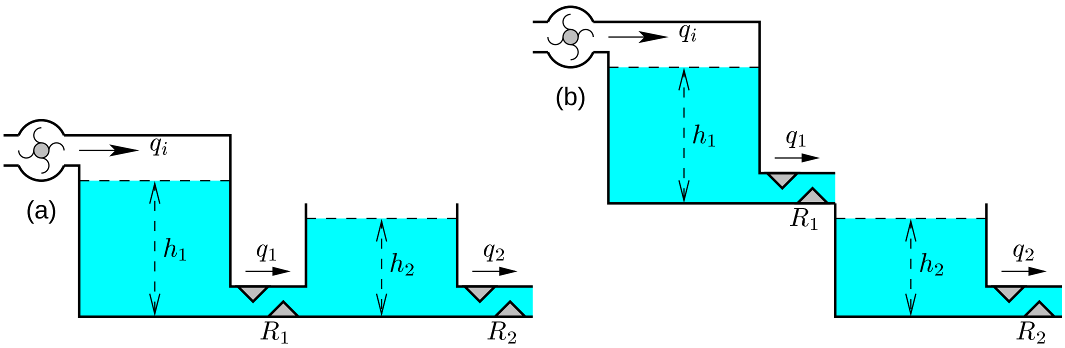


Figura 5.61: Sistemas com dois tanques do exemplo 5.6-B

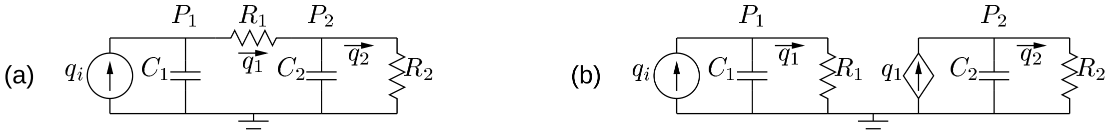


Figura 5.62: Equivalentes elétricos dos sistemas da figura 5.61

A figura 5.62 apresenta os circuitos equivalentes aos sistemas com dois tanques interligados da figura 5.61. Para levar em conta no sistema (b) que o fluxo de saída do primeiro tanque é o fluxo de entrada do segundo, utilizou-se uma fonte dependente de corrente. ■

Exemplo 5.6-C:

A figura 5.63 apresenta um modelo simplificado de um sistema de abastecimento d'água de uma cidade, onde $q_2(t)$ representa o consumo instantâneo de água. Adotanto a hipótese simplificadora de que a água é incompressível, obtenha um circuito elétrico equivalente.

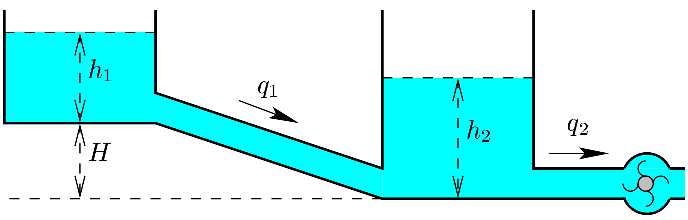


Figura 5.63: Diagrama do sistema de abastecimento simplificado do exemplo 5.6-C

Pela equação de Bernoulli (equação 5.45), a diferença de altura entre os dois tanques pode ser modelada como uma fonte de pressão constante de valor $\rho g H$. Com isto, o sistema da figura 5.63 pode ser modelado pelo equivalente elétrico da figura 5.64. A resistência R_t e a impedância L_t modelam, respectivamente, a resistência fluídica e a impedância fluídica da tubulação entre os tanques.

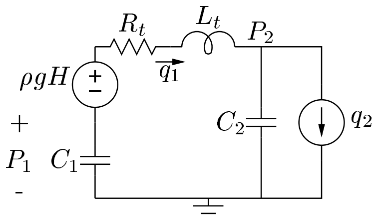


Figura 5.64: Equivalente elétrico do sistema de abastecimento da figura 5.63

C_1 e C_2 são as capacitâncias fluídicas dos dois recipientes. Pode-se incluir uma resistência em série com a fonte de corrente para modelar a resistência fluídica da segunda tubulação, mas ela seria irrelevante para a análise do circuito. ■

Exemplo 5.6-D:

Um fluido incompressível flui a uma vazão $q_i(t)$ para um cilindro através de uma restrição, conforme mostrado na figura 5.65. $P(t)$ é a pressão no interior do cilindro e P_0 é a pressão constante a montante da restrição. Dentro do cilindro um pistão é forçado para a direita à medida em que a pressão $P(t)$ cresce. Uma mola ideal resiste ao movimento do pistão, sendo que a pressão no cilindro do lado da mola é atmosférica. O pistão está inicialmente na posição $x(t) = 0$ quando $P = 0$, e nesta posição a mola não está nem comprimida nem distendida. Assuma que o pistão tenha massa e atrito desprezíveis. Escreva as equações que descrevem o movimento linear $x(t)$ do pistão e calcule a posição estacionária que o pistão irá alcançar.

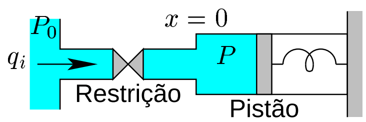


Figura 5.65: Sistema fluídico com pistão e mola do exemplo 5.6-D

Se R_f é a resistência fluídica da restrição, então:

$$P_0 P(t) = R_f q^2(t)$$

O volume de fluido $V(t)$ contido no cilindro é:

$$V(t) = \int q(t)dt \quad \Rightarrow \quad q(t) = \dot{V}(t) \quad \Rightarrow \quad P_0 - P(t) = R_f \dot{V}^2(t)$$

Sendo A a área da seção transversal do cilindro:

$$V(t) = Ax(t) \quad \Rightarrow \quad P_0 - P(t) = R_f A^2 \dot{x}^2(t)$$

O fluido pressurizado exerce sobre o pistão uma força $F_P(t)$, dada por:

$$F_P(t) = AP(t) \quad \Rightarrow \quad P(t) = \frac{F_P(t)}{A} \quad \Rightarrow \quad P_0 - \frac{F_P(t)}{A} = R_f A^2 \dot{x}^2(t)$$

O pistão tem massa desprezível, de modo que somatório das forças atuantes sobre ele é nulo. Portanto, a força exercida pelo fluido deve ser igual à força elástica exercida pela mola, que é suposta ter uma constante elástica k:

$$F_P(t) = F_k(t) \quad \Rightarrow \quad F_P(t) = kx(t) \quad \Rightarrow \quad P_0 - \frac{kx(t)}{A} = R_f A^2 \dot{x}^2(t) \quad \Rightarrow$$

$$\dot{x}^2(t) + \left(\frac{k}{R_f A^3}\right) x(t) = \left(\frac{1}{R_f A^2}\right) P_0 \tag{5.52}$$

A equação 5.52 descreve o comportamento de $x(t)$ em função da pressão externa P_0. Quando o sistema atingir o regime estacionário, $\dot{x}(t) = 0$ e $x(t)$ terá o seu valor de regime, denotado x_{SS}. Com isso:

$$\left(\frac{k}{R_f A^3}\right) x_{SS} = \left(\frac{1}{R_f A^2}\right) P_0 \quad \Rightarrow \quad x_{SS} = \left(\frac{A}{k}\right) P_0$$

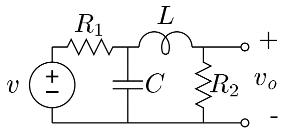
Nota-se que o valor estacionário do deslocamento do pistão independe da resistência fluídica da restrição. A resistência influenciará apenas o tempo necessário para que o sistema atinja o regime estacionário. ■

5.7 Sistemas térmicos (A FAZER)

ESTA SEÇÃO AINDA NÃO FOI ESCRITA.

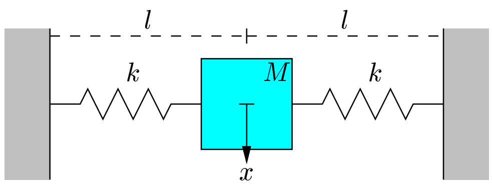
Exercícios

A. Obtenha um diagrama de blocos equivalente ao circuito elétrico a seguir, representando cada um dos componentes por um bloco elementar. Calcule a função de transferência $G(s) = V_o(s)/V(s)$ por redução do diagrama de blocos e usando a fórmula de Mason.

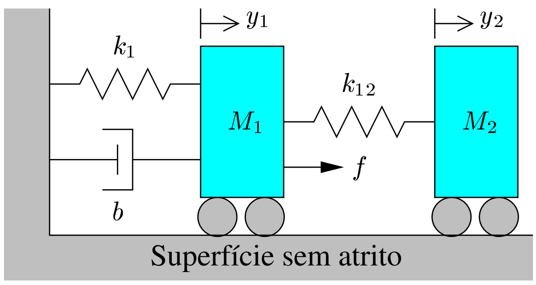


B. Trens de levitação magnética flutuam sobre uma pequena camada de ar. A força de levitação F_L é controlada pela corrente no enrolamento de levitação i e é dada por $F_L = k\frac{i^2}{z^2}$, onde z é a espessura da camada de ar entre o trem e os trilhos. Esta força se opõe à força peso ($F = mg$, m é a massa do trem). Modele a espessura z em função da corrente de controle i e linearize o modelo obtido no ponto de equilíbrio do sistema quando $i = i_{PO}$.

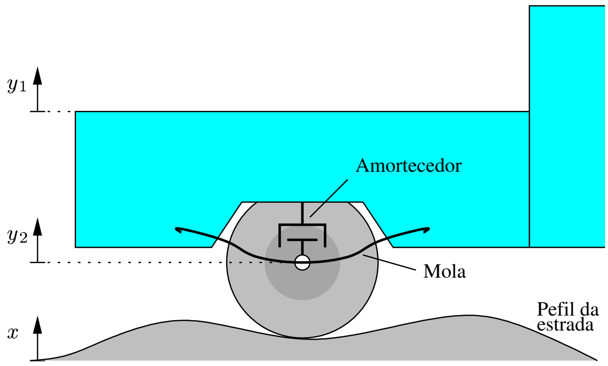
C. No sistema representado pela vista superior a seguir, obtenha a equação diferencial que descreve o deslocamento linear x do corpo, partindo da hipótese que o corpo tem uma massa M e uma velocidade inicial v_o. A massa está conectado às paredes por duas molas de constante elástica K e desliza sobre uma superfície com um coeficiente de atrito b. Nenhuma força externa é aplicada ao sistema.



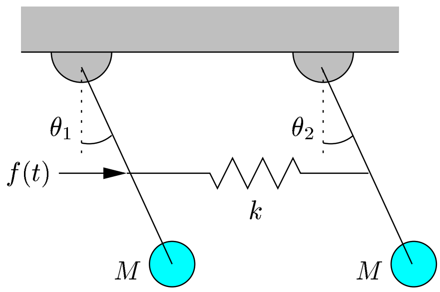
D. Determine a função de transferência $Y_1(s)/F(s)$ para o sistema da figura a seguir. Calcule a relação entre os parâmetros M_2 e k_{12} de forma que a massa M_1 não vibre quando $f(t) = \alpha \sin(\omega_0 t)$ (ou seja, não haja componentes de freqüência ω_0 na saída).



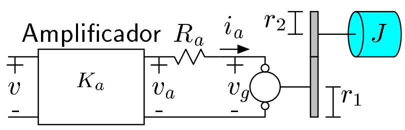
E. O sistema de suspensão para uma roda de um modelo antigo de caminhonete é ilustrado na figura a seguir. A massa do veículo é m_1 e a massa da roda é m_2. A mola da suspensão tem uma constante elástica k_1 e o pneu tem uma constante elástica k_2. A constante de amortecimento do amortecedor é f. Obtenha a função de transferência $Y_1(s)/X(s)$, que representa a resposta do veículo a irregularidades na pista.



F. A figura a seguir mostra dois pêndulos suspensos em articulações sem atrito e conectados no meio da barra por uma mola. Assuma que que cada pêndulo possa ser representado por uma massa pontual M presa no final de uma barra de comprimento L e massa desprezível. Também assuma que o deslocamento é pequeno (o que implica que a mola permanece aproximadamente na horizontal) e que aproximações lineares podem ser feitas para o seno e o cosseno. A mola localizada no meio das barras encontra-se em repouso (nem distendida nem contraída) quando $\theta_1 = \theta_2$. A força de entrada é representada por $f(t)$, aplicada no centro da barra da esquerda. Obtenha as equações do movimento para $\theta_2(t)$.



G. Obtenha um circuito elétrico equivalente ao sistema da figura a seguir, onde um motor DC acionado pela armadura através de um amplificador gira um eixo, ao qual está acoplado uma engrenagem de raio r_1. Na outra engrenagem, de raio r_2, está conectada uma carga de momento de inércia J. A indutância de armadura do motor DC e os atritos são desprezíveis. Sabe-se que a constante do motor é K_m (ou seja, o torque gerado é $\tau = K_m i_a$ e a tensão induzida na armadura é $v_g = K_m\omega$) e que a inércia do rotor do motor é J_m

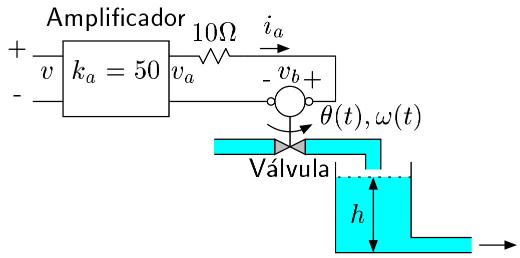


H. Um motor DC controlado pela armadura está atuando sobre uma carga. A tensão de entrada é de 5V. A velocidade no instante t = 2s é de 30rad/s e a velocidade de regime é de 70rad/s quando $t \to \infty$. Determine a função de trasferência $\omega(s)/V(s)$.

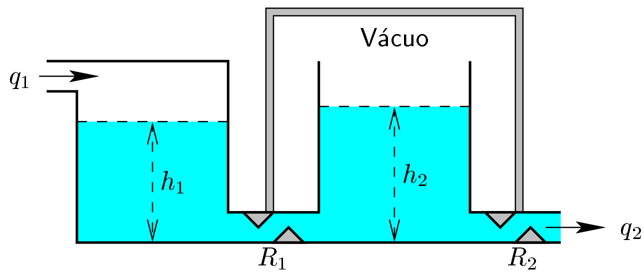
I. Em um tanque, o nível de água $h(t)$ é controlado por um sistema em malha aberta, como mostrado na figura. Um motor DC controlado pela corrente de armadura gira um eixo, abrindo uma válvula. A indutância do motor DC e os atritos são desprezíveis. A altura da coluna de água é:

$$h(t) = \int [1.6\theta(t)h(t)]dt$$

Sabendo que a constante do motor é $K_m = 10$ (ou seja, o torque gerado é $\tau = K_m i_a$ e a tensão induzida na armadura é $v_b = K_m \omega$) e que a inércia do rotor do motor e da válvula é $J = 6 \times 10^{-3}$ kgm^2, determine a função de transferência $H(s)/V(s)$.

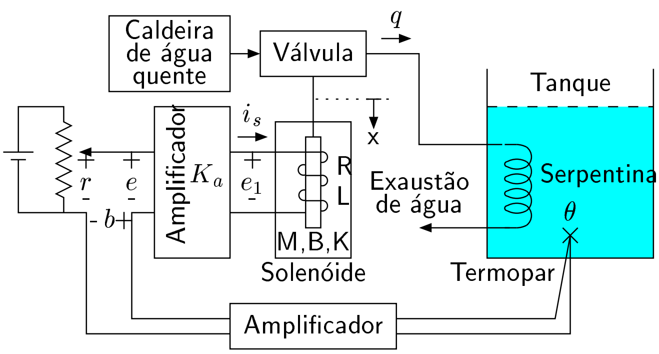


J. Usando um circuito elétrico equivalente, determine a função de transferência entre a altura h_2 e o fluxo q_1 para o sistema hidráulico mostrado na figura a seguir. Determine $h_2(t)$ supondo um fluxo $q_1(t)$ constante. Despreze a inércia hidráulica.

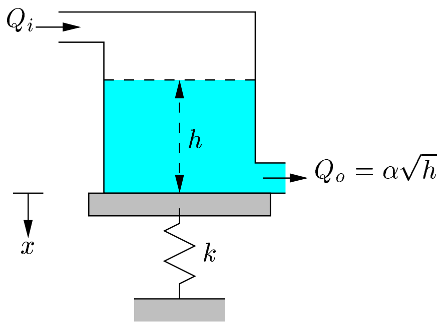


K. Um processo industrial exige que a temperatura θ do material sendo misturado em um tanque seja mantida constante. O sistema completo, mostrado na figura, tem a tensão r como entrada, calibrada em termos da temperatura desejada. A temperatura efetiva é medida através de um termopar imerso no tanque. A voltagem produzida no termopar é amplificada para produzir uma voltagem $b = K_b\theta$. O sinal atuante e é amplificado para produzir a voltagem e_1. Essa voltagem energiza o solenóide, que tem resistência R e indutância L, produzindo uma força proporcional à corrente do solenóide, $f_s = K_s i_s$. Essa força age na massa M, atrito B e mola de retenção K da armadura do solenóide e da válvula para controlar a posição x da válvula. A posição da válvula, a seu turno, controla o fluxo q de água quente na serpentina de aquecimento, $q = K_q x$. A temperatura do tanque é diretamente proporcional ao fluxo de água com um tempo de atraso, ou seja, $\theta = K_c q/(s + a)$.

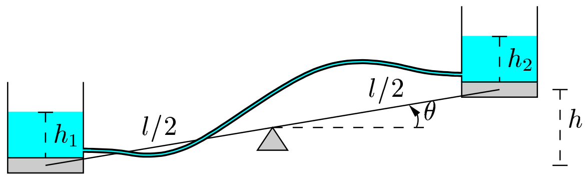
1. Desenhe um diagrama de blocos mostrando cada componente desse sistema. Interconecte os blocos, entitulando a entrada e a saída de cada bloco explicitamente.
2. Determine a função de transferência de cada bloco e do sistema como um todo.



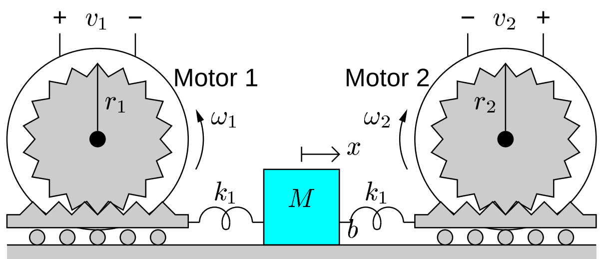
L. Na figura a seguir está representado um sistema onde um recipiente contendo um líquido de densidade ρ está apoiado sobre uma mola de constante elástica k. A vazão de entrada de líquido no recipiente é Q_i e a vazão de saída é dada por $Q_o = \alpha\sqrt{h}$, onde h é a altura da coluna de líquido. As massas do recipiente e da plataforma que o apóia podem ser desprezadas. Obtenha um modelo (não-linear) para este sistema, relacionando a vazão Q_i com a posição x da plataforma. Adote $x = 0$ como sendo a posição em que a plataforma se mantém em repouso quando não há líquido no recipiente.



M. Determine um circuito equivalente elétrico para o sistema do esquema a seguir, onde dois recipientes de seção transversal constante e igual contendo um líquido incompressível estão posicionados nas duas extremidades de uma gangorra e ligados entre si por um tubo flexível. Indique as relações entre h_1, h_2 e θ e as respectivas grandezas relacionadas no sistema elétrico. Os recipientes se apóiam em plataformas pivotantes, de modo que podem ser considerados como estando sempre na posição vertical. As massas da gangorra e das bases pivotantes são desprezíveis, bem como o atrito no movimento de rotação da gangorra. O tubo é suficientemente delgado para que a inércia da água em movimento no seu interior possa ser desconsiderada e para que o escoamento seja laminar. Assuma conhecidas as constantes necessárias para modelar o sistema: área dos recipientes (A), densidade do líquido (ρ), resistência fluídica do tubo (R_f), aceleração da gravidade (g), comprimento (l) da gangorra, etc.



N. Dois motores CC com imã permanente estão conectados a um mesmo corpo através de dois sistemas pinhão-cremalheira e duas molas, conforme o esquema a seguir. Obtenha um modelo no espaço de estados que relacione a posição x do corpo com as tensões v_1 e v_2 aplicadas nos dois motores. O deslizamento das cremalheiras sobre a superfície de apoio acontece praticamente sem atrito. O momento de inércia do pinhão e a massa da cremalheira são negligenciáveis. O atrito entre o corpo e a superfície pode ser considerado viscoso. A indutância de armadura dos dois motores é desprezível. Assuma conhecidas as constantes necessárias para modelar o sistema: resistências de armadura (R_1 e R_2), constantes do motor (K_1 e K_2) e momentos de inércia dos rotores (J_1 e J_2) das máquinas, raios (r_1 e r_2) das engrenagens, constantes elásticas (k_1 e k_2) das molas, coeficiente de atrito viscoso (b) entre o corpo e o solo, massa (M) do corpo, etc.



Capítulo 6

Propriedades dos sistemas

6.1 Introdução

A obtenção de um modelo matemático para um sistema, abordada nos capítulos anteriores, tem como uma das razões principal a necessidade de se deduzir propriedades dos processos a serem controlados, sem que seja preciso realizar-se ensaios exaustivos com o sistema.

Uma das principais propriedades em engenharia de controle é a da *estabilidade*. A estabilidade nos garante que, após um período transitório, o sistema se fixará em um modo de funcionamento permanente, o que pode não ocorrer para um sistema instável. Sabendo que um sistema instável poderá exibir uma resposta errática e destrutiva, o controle deve se assegurar que o sistema é estável, com uma resposta limitada e controlável.

Outras propriedades importantes dos sistemas são a *controlabilidade* e a *observabilidade*, que são definidas quando se adota para o sistema uma representação no espaço de estados. A controlabilidade diz respeito à capacidade de se poder levar o sistema a qualquer estado desejado, enquanto que a observabilidade se refere à possibilidade de se deduzir o estado do sistema a partir da observação dos seus sinais de entrada e de saída.

Este capítulo apresentará inicialmente as ferramentas que atestam a estabilidade de um sistema, a partir do seu modelo matemático. Em seguida, serão também expostos os métodos para se verificar se um dado sistema é observável e/ou controlável.

6.2 O conceito de estabilidade

Existem diversas definições de estabilidade, quase todas equivalentes ao se tratar de sistemas lineares. Adotaremos a definição que diz que um sistema qualquer é estável se e somente se sua saída for limitada para toda e qualquer entrada limitada. Este enunciado é conhecido como a definição *BIBO (Bounded Input, Bounded Output)* de estabilidade.

A estabilidade de um sistema linear contínuo pode ser determinada a partir da sua função de transferência (ou de sua matriz de transição de estados). Mostra-se que uma condição necessária e suficiente para que um sistema seja estável é que todos os pólos de sua função de transferência (ou todos os autovalores da sua matriz de transição de estados) tenham parte real negativa.

A justificativa intuitiva para esta afirmação vem da análise da resposta transitória (ou resposta natural) dos sistemas. Se um sistema tem função de transferência G(s) dada por:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}$$

então o seu sinal de saída $Y(s)$, para um sinal de entrada $U(s)$, pode ser decomposto em frações parciais da seguinte forma:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{c_1}{s+p_1} + \frac{c_2}{s+p_2} + \cdots + \frac{c_n}{s+p_n} + Y_U(s)$$

onde $Y_U(s)$ representa o somatório das frações parciais correspondentes aos termos introduzidos pelo sinal de entrada $U(s)$. Se $u(t)$ é limitado, a saída $y_u(t)$, ou saída forçada, também será limitada, pois a saída forçada tem a mesma natureza que o sinal de entrada. Desta forma, a possibilidade de surgimento de um sinal de saída ilimitado para uma entrada limitada vem dos termos correspondentes aos pólos da função de transferência.

Há seis possíveis tipos de pólos para um sistema, conforme indica a figura 6.1. Os termos em frações parciais correspondentes a cada um deles geram as seguintes componentes no sinal de saída:

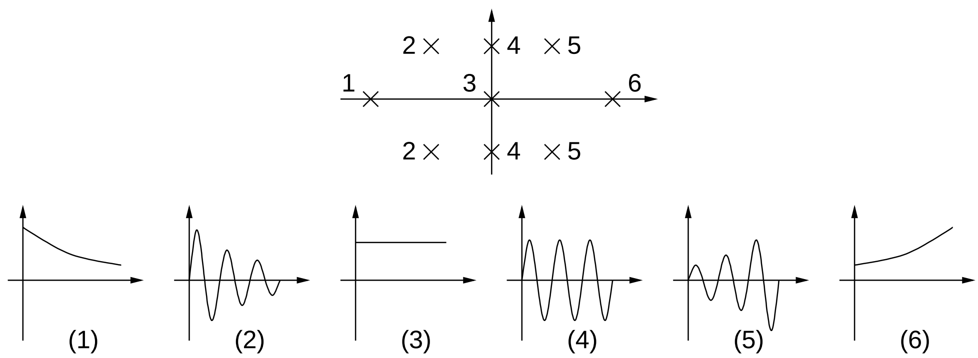


Figura 6.1: Possíveis localizações dos pólos e sua influência no sinal de saída

1. pólos reais negativos: exponencial descrescente $y(t) = Me^{-at}$;
2. pólos complexos com parte real negativa: senóide exponencialmente amortecida $y(t) = Me^{-at}\sin(\omega t + \phi)$;
3. pólos na origem: sinal constante $y(t) = M$;
4. pólos imaginários puros: senóide constante $y(t) = M\sin(\omega t + \phi)$;
5. pólos complexos com parte real positiva: senóide exponencialmente crescente $y(t) = Me^{at}\sin(\omega t + \phi)$; e
6. pólos reais positivos: exponencial crescente $y(t) = Me^{a}t$.

Se todos os pólos do sistema têm parte real negativa, eles se enquadram nos casos (1) ou (2) acima, de modo que gerarão sinais que desaparecerão com o tempo. Assim, pode-se garantir que qualquer sinal de entrada limitado gerará um sinal de saída limitado, pois após um tempo suficientemente longo restarão apenas os componentes forçados do sinal de saída. Por conseqüência, o sistema será estável.

Se o sistema tiver ao menos um pólo com parte real positiva, o pólo em questão se enquadra em um dos casos (5) ou (6) acima, o que gerará um sinal que tende para infinito. Portanto, independentemente de qual seja o sinal de entrada aplicado, o sinal de saída tenderá para infinito e conseqüentemente o sistema é instável.

Quando o sistema tem pólos com parte real nula, que correspondem aos casos (3) e (4) acima, o sistema é dito marginalmente estável se todos os demais pólos tiverem parte real negativa. Estes sistemas geram sinais de saída limitados para alguns sinais de entrada e ilimitados para outros. Como a definição de estabilidade exige que o sinal de saída seja limitado para qualquer sinal de entrada limitado, os sistemas marginalmente estáveis são considerados instáveis.

Para o caso (3) com um pólo na origem, a saída será limitada se o sinal de entrada tiver valor médio nulo, ou tenderá para infinito no caso contrário. Por exemplo, uma entrada senoidal gerará uma saída cossenoidal limitada, enquanto que uma entrada degrau gerará uma saída em rampa que tende para infinito. Para o caso (4) com um par de pólos imaginários $\pm j\omega$, a saída será limitada desde que o sinal de entrada não contenha componentes senoidais de freqüência ω, caso em que a saída tenderá para infinito.

Um exemplo clássico de sistema marginalmente estável é mostrado na figura 6.2. A ponte Tacoma Narrows, no estado de Washington, EUA, foi aberta ao tráfego em julho de 1940. Notou-se que a ponte apresentava oscilações sempre que o vento soprava. Em novembro de 1940, uma determinada rajada de vento produziu uma oscilação que cresceu em amplitude até que a ponte se partiu. Este comportamento indica que o modelo da ponte apresentava um par de pólos em $\pm j\omega$, ou próximos desta localização. Quando ocorreu uma rajada de vento com um comportamento oscilatório próximo da freqüência ω, a oscilação de saída tendeu a crescer até que a estrutura não resistiu. A primeira foto da figura 6.2 mostra o início da oscilação, enquanto a segunda mostra o final da catástrofe.

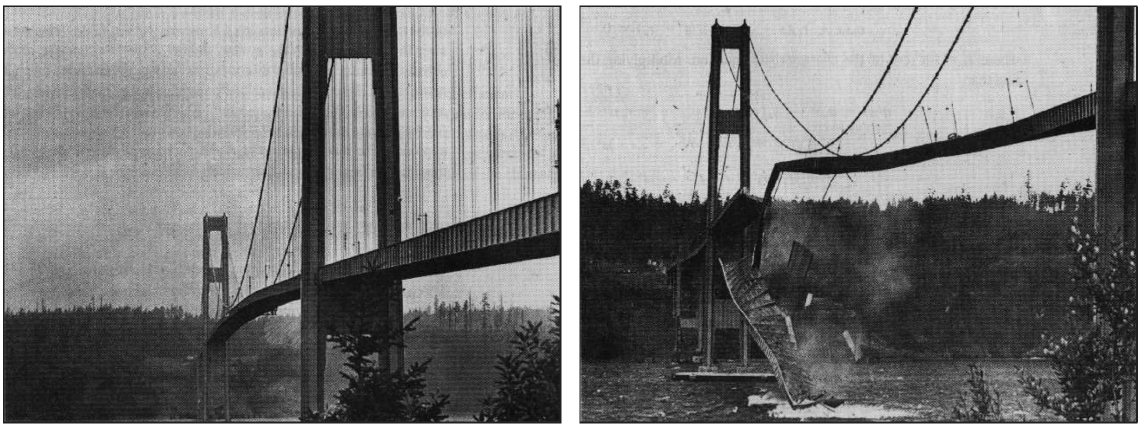


Figura 6.2: Acidente ocasionado por instabilidade da ponte Tacoma Narrows, EUA

6.3 O critério de estabilidade de Routh-Hurwitz

Por volta de 1800, A. Hurwitz e E.J. Routh publicaram independentemente um método para investigar a estabilidade de um sistema linear contínuo, considerando a equação característica do sistema. A equação característica é escrita como:

$$\Delta(s) = a_0 s_n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n = 0$$

Para se afirmar a estabilidade de um sistema contínuo, é necessário que se determine se alguma das raízes de $\Delta(s) = 0$ está no semiplano direito do plano s. Se a equação característica for fatorada em termos dos pólos $p_1, p_2, \cdots, p_n$, temos:

$$a_0(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n) = 0$$

Multiplicando-se os fatores, acha-se que:

$$\begin{aligned}\Delta(s) = a_0 s^n - a_0(p_1+p_2+\cdots+p_n)s^{n-1} + a_0(p_1p_2+p_1p_3+p_2p_3+\cdots)s^{n-2}\\ - a_0(p_1p_2p_3+p_1p_2p_4)s^{n-3} + \cdots + a_0(-1)^n(p_1p_2\cdots p_n) = 0\end{aligned}$$

Em outras palavras:

$$\begin{aligned}\Delta(s) = a_0 s^n &- a_0(\text{soma de todas as raízes})s^{n-1}\\ &+ a_0(\text{soma do produto das raízes tomadas 2 a 2})s^{n-2}\\ &- a_0(\text{soma do produto das raízes tomadas 3 a 3})s^{n-3}\\ &+ \cdots + a_0(-1)^n(\text{produto das } n \text{ raízes}) = 0\end{aligned}$$

Este resultado mostra que todos os coeficientes do polinômio devem ter o mesmo sinal se todas as raízes estão no semiplano esquerdo. Além disso, todos os coeficientes devem ser não-nulos. Estas condições, embora necessárias, não são suficientes para garantir a estabilidade. Por exemplo, a equação

$$s^3 + s^2 + 2s + 8$$

satisfaz estas duas condições mas tem raizes -2 e $0.5 \pm j1.9365$, sendo que o par de pólos complexos é instável.

O critério de Routh-Hurwitz é uma condição necessária e suficiente para a estabilidade de um sistema. O procedimento se baseia em uma tabela derivada dos coeficientes do polinômio característico, montada da seguinte forma:

$$\begin{array}{r|lllll}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots \\
s^{n-2} & b_0 & b_2 & b_4 & \cdots & \\
s^{n-3} & b_1 & b_3 & b_5 & \cdots & \\
\vdots & \vdots & & & & \\
s^3 & y_0 & y_2 & & & \\
s^2 & y_1 & y_3 & & & \\
s^1 & z_0 & & & & \\
s^0 & z_1 & & & &
\end{array}$$

onde $a_0, a_1, \cdots, a_n$ são os coeficientes do polinômio e:

$$\begin{array}{lll}
b_0 = \dfrac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} & b_2 = \dfrac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1} & b_4 = \dfrac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1} \\
b_1 = \dfrac{b_0 a_3 - a_1 b_2}{b_0} & b_3 = \dfrac{b_0 a_5 - a_1 b_4}{b_0} & b_5 = \dfrac{b_0 a_7 - a_1 b_6}{b_0} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
z_0 = \dfrac{y_1 y_2 - y_0 y_3}{y_1} & z_1 = \dfrac{z_0 y_3 - 0}{z_0} = y_3 & -
\end{array}$$

Se o polinômio é de ordem n, a tabela de Routh-Hurwitz terá n linhas. As duas últimas linhas da tabela (correspondentes a s^0 e a s^1) terão uma coluna; as duas linhas seguintes (correspondentes a s^2 e a s^3) terão duas colunas; e assim sucessivamente. Note-se que o último termo de todas as linhas pares[1] é idêntico.

O critério de estabilidade de Routh-Hurwitz estabelece que o número de raízes da equação característica com parte real positiva é igual ao número de mudanças de sinal na primeira coluna da tabela. Este critério requer portanto que todos os elementos da primeira coluna tenham o mesmo sinal para que o sistema seja estável. O resultado não se altera quando todos os coeficientes de uma mesma linha são multiplicados ou divididos por um número positivo, o que muitas vezes pode ser útil para simplificar o cálculo.

Exemplo 6.3-A:

Determine a estabilidade de um sistema descrito pela função de transferência:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 4s^2 + 11s + 10}$$

A tabela de Routh-Hurwitz para a equação característica é:

$$\begin{array}{c|ccc}
s^5 & 1 & 3 & 11 \\
s^4 & 2 & 4 & 10 \\
s^3 & 1 & 6 & \\
s^2 & -8 & 10 & \\
s^1 & -7.25 & & \\
s^0 & 10 & &
\end{array}$$

Houve duas mudanças de sinal, o que implica que o sistema tem dois pólos com parte real positiva e que portanto é instável. Este resultado pode ser confirmado determinando-se as raízes da equação característica, que são -1.1066, $-1.2501 \pm j1.2944$ e $0.8034 \pm j1.4647$. Este último par de pólos complexos causa a instabilidade do sistema. ■

Algumas situações particulares podem ocorrer quando o primeiro elemento de uma linha é nulo. Neste contexto, devem ser analisados dois casos distintos:

- o primeiro elemento da linha é nulo e há pelo menos um outro elemento da mesma linha não-nulo; ou

[1] As linhas pares são aquelas que correspondentes a s^0, s^2, s^4, etc.

- todos os elementos de uma linha são nulos (esta situação inclui o caso da linha com um único elemento nulo).

Quando o primeiro elemento de uma linha é nulo e há pelo menos um elemento não-nulo na mesma linha, o elemento nulo pode ser substituído por um pequeno número positivo ϵ; faz-se em seguida ϵ tender a zero e verifica-se o número de mudanças de sinal na tabela.

Exemplo 6.3-B:

Determine a estabilidade de um sistema descrito pela função de transferência:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 11s + 10}$$

A tabela de Routh-Hurwitz para a equação característica é:

$$\begin{array}{c|ccc} s^5 & 1 & 2 & 11 \\ s^4 & 2 & 4 & 10 \\ s^3 & \epsilon & 6 & \\ s^2 & \frac{4\epsilon-12}{\epsilon} & 10 & \\ s^1 & \frac{-10\epsilon^2+24\epsilon-72}{4\epsilon-12} & & \\ s^0 & 10 & & \end{array} \quad \underset{\epsilon\to 0}{\Rightarrow} \quad \begin{array}{c|ccc} s^5 & 1 & 2 & 11 \\ s^4 & 2 & 4 & 10 \\ s^3 & +0 & 6 & \\ s^2 & -\infty & 10 & \\ s^1 & 6 & & \\ s^0 & 10 & & \end{array}$$

Houve duas mudanças de sinal, o que implica que o sistema tem dois pólos com parte real positiva e que portanto é instável. Este resultado está correto, tendo em vista que as raízes da equação característica são -1.3087, $-1.2407 \pm j1.0375$ e $0.8950 \pm j1.4561$. ■

Quando ocorre uma linha com todos os elementos nulos na tabela de Routh-Hurwitz, isto indica que o polinômio contém singularidades que estão simetricamente dispostas em torno da origem do plano "s". Logo, ocorrem fatores como $(s+\sigma)(s-\sigma)$ ou $(s+j\omega)(s-j\omega)$. Conseqüentemente, o sistema é instável ou pelo menos marginalmente estável.

Nesta situação, a linha que imediatamente precede a linha nula na tabela fornece os coeficientes do chamado *polinômio auxiliar*. As raízes deste polinômio $P(s)$ são os pólos da equação característica responsáveis pelo aparecimento da linha nula.

Exemplo 6.3-C:

Determine a estabilidade de um sistema descrito pela função de transferência:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{s^4 + 3s^3 + 6s^2 + 12s + 8}$$

A tabela de Routh-Hurwitz para a equação característica é:

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 6 & 8 \\ s^3 & 3 & 12 & \\ s^2 & 2 & 8 & \\ s^1 & 0 & & \\ s^0 & ? & & \end{array} \quad \Rightarrow \quad P(s) = 2s^2 + 8 \quad \Rightarrow \quad s = \pm j2$$

Este sistema tem dois pólos imaginários puros e é portanto marginalmente estável. ■

Exemplo 6.3-D:

Um sistema com um ganho ajustável K é descrito pela função de transferência:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{s^4 + Ks^3 + 6s^2 + 12s + 8}$$

Determine a faixa de valores de K para os quais o sistema é estável.

A tabela de Routh-Hurwitz para a equação característica é:

$$\begin{array}{c|ccc}
s^4 & 1 & 6 & 8 \\
s^3 & K & 12 & \\
s^2 & \frac{6K-12}{K} & 8 & \\
s^1 & \frac{-8K^2+72K-144}{6K-12} & & \\
s^0 & 8 & &
\end{array}$$

Para que o sistema seja estável, é necessário que todos os coeficientes da primeira coluna da tabela sejam maiores que zero. Isto leva ao seguinte sistema de inequações:

$$\left\{ \begin{array}{r} K > 0 \\ 6K - 12 > 0 \\ -8K^2 + 72K - 144 > 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} K > 0 \\ K > 2 \\ K > 3 \quad \text{e} \quad K < 6 \end{array} \right.$$

O sistema será estável se todas as inequações forem satisfeitas simultaneamente. Logo, conclui-se que o sistema será estável para qualquer valor do ganho tal que $3 < K < 6$. ■

6.4 Análise de estabilidade relativa

O critério de estabilidade de Routh-Hurwitz dá a resposta quanto à questão da estabilidade absoluta. Isto, em muitos casos práticos, não é suficiente, pois é freqüente a necessidade de informações sobre a *estabilidade relativa* do sistema.

A estabilidade relativa de um sistema pode ser definida em termos do tempo de decaimento dos termos introduzidos pelos pólos do sistema no seu sinal de saída: quanto menor este tempo, maior a estabilidade relativa do sistema. Para sistemas instáveis, este tempo é infinito, o que implica em uma estabilidade relativa nula. A propriedade da estabilidade relativa é diretamente relacionada à parte real dos pólos do sistema.

Uma abordagem útil para se examinar a estabilidade relativa é deslocar o eixo imaginário no plano s e em seguida aplicar o critério de Routh-Hurwitz no novo polinômio característico. Isto é, faz-se a substituição:

$$s = \hat{s} - \sigma \qquad \sigma \text{ constante}$$

na equação característica do sistema, escreve-se o novo polinômio em termos de $\hat{s}$ e aplica-se o critério neste novo polinômio. O número de mudanças de sinal na primeira coluna da tabela será igual ao número de raízes do polinômio original que estão localizados à direita da linha vertical $s = -\sigma$.

6.5 O critério de estabilidade de Jury

Em razão do exposto na seção 3.9, da mesma forma que a estabilidade de um sistema linear contínuo está intrinsicamente relacionada ao fato de todos os pólos do sistema estarem situados no semiplano esquerdo do plano complexo, a estabilidade de um sistema linear discreto tem como condição necessária e suficiente o fato de todos os pólos do sistema estarem dentro do círculo de raio unitário do plano complexo. Isto se deve à relação entre os pólos p_s de um sistema contínuo e os pólos p_z do mesmo sistema quando amostrado por um segurador de ordem zero ser dada pela equação 3.26, ou seja:

$$p_z = e^{p_s T}$$

Daí, percebe-se facilmente que pólos contínuos estáveis (com parte real negativa) gerarão pólos complexos com módulo menor que 1, e vice-versa.

Portanto, para se afirmar a estabilidade de um sistema discreto, deve-se garantir que todas as raízes da equação característica têm módulo inferior a 1. A equação característica, $\Delta(z) = 0$, é escrita como:

$$\Delta(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

Se a equação característica for fatorada em termos dos pólos $p_1, p_2, \cdots, p_n$, temos:

$$\Delta(z) = a_0 (z - p_1)(z - p_2) \cdots (z - p_n)$$

Supondo-se que o sistema seja estável, o valor do produto de todos os termos $(z - p_i)$ vai ser sempre positivo quando $z = 1$, pelos seguintes motivos:

- Se o pólo p_i for real, a suposição de que o sistema é estável implica que $|p_i| < 1$. Logo, o termo $(1 - p_i)$ gerará um valor positivo.
- Se o polo p_i for complexo, pode ser expresso na forma polar, $p_i = Me^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$. Como os pólos complexos sempre aparecem aos pares, seu conjugado $p_i^* = Me^{-j\theta}$ também será pólo, e o produto $(1 - p_i)(1 - p_i^*)$ gerará um valor positivo[2]:

$$(1 - Me^{j\theta})(1 - Me^{-j\theta}) = 1 - Me^{j\theta} - Me^{-j\theta} + M^2 = 1 + M^2 - 2M\cos\theta$$

De modo similar, mostra-se que todos os termos $(z - p_i)$ são negativos quando $z = -1$. Daí, pode-se estabelecer que todo sistema estável com $a_0 > 0$ obedece às seguintes condições:

$$\Delta(1) > 0 \qquad (-1)^n \Delta(-1) > 0$$

Estas condições, embora necessárias, não são suficientes para garantir a estabilidade. Por exemplo, a equação:

$$\Delta(z) = z^3 + z^2 + 2z + 8$$

satisfaz estas duas condições mas tem raízes -2 e $0.5 \pm j1.9365$, sendo que o pólo real é instável.

[2]O valor mínimo de $f(M) = 1 + M^2 - 2M\cos\theta$ ocorre para $M = \cos\theta$, e é igual a $\sin^2\theta$.

O critério de Jury é uma condição necessária e suficiente para a estabilidade de um sistema discreto. O procedimento, tal como o critério de Routh-Hurwitz, se baseia em uma tabela derivada dos coeficientes do polinômio característico, montada da seguinte forma:

$$
\begin{array}{ccccc|l}
a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n & \\
a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 & \alpha_n = -\frac{a_n}{a_0} \\
\hline
a_0^{n-1} & a_1^{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-1} & & \\
a_{n-1}^{n-1} & a_{n-2}^{n-2} & \cdots & a_0^{n-1} & & \alpha_{n-1} = -\frac{a_{n-1}^{n-1}}{a_0^{n-1}} \\
\hline
\vdots & \vdots & \vdots & & & \\
\hline
a_0^1 & a_1^1 & & & & \\
a_1^1 & a_0^1 & & & & \alpha_1 = -\frac{a_1^1}{a_0^1} \\
\hline
a_0^0 & & & & &
\end{array}
$$

onde:

$$
\begin{aligned}
a_i^{k-1} &= a_i^k - \alpha_k a_{k-i}^k \\
\alpha_k &= -(a_k^k / a_0^k)
\end{aligned}
$$

A primeira e a segunda linhas da tabela de Jury são os coeficientes da equação característica $\Delta(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ em ordem direta e reversa, respectivamente. A terceira linha é obtida multiplicando-se a segunda linha por $\alpha_n = -(a_n/a_0)$ e somando-se o resultado com a primeira linha. O último elemento na terceira linha é portanto zero. A quarta linha é a terceira linha na ordem reversa. O esquema é então repetido até que se chegue à última linha, com um único elemento.

O teste de estabilidade de Jury estabelece que, se $a_0 > 0$, então a equação característica $\Delta(z)$ tem todos os pólos dentro do círculo unitário se e somente se todos os a_0^k, $k = 0, 1, \cdots, n-1$ são positivos. Se nenhum a_0^k é zero, então o número de a_0^k negativos é igual ao número de raízes fora do círculo unitário.

Exemplo 6.5-A:

Determine a região de valores possíveis para os parâmetros a_1 e a_2 de tal forma que um sistema descrito pela função de transferência discreta a seguir seja estável:

$$G(z) = \frac{N(z)}{z^2 + a_1 z + a_2}$$

A tabela de Jury é:

$$
\begin{array}{ccc|l}
1 & a_1 & a_2 & \\
a_2 & a_1 & 1 & \alpha_2 = -a_2 \\
\hline
1 - (a_2)^2 = (1-a_2)(1+a_2) & a_1 - a_1 a_2 = a_1(1-a_2) & & \\
a_1(1-a_2) & (1-a_2)(1+a_2) & & \alpha_1 = -\frac{a_1}{1+a_2} \\
\hline
(1-a_2)(1+a_2) - \frac{(a_1)^2(1-a_2)}{1+a_2} & & &
\end{array}
$$

Todas as raízes da equação característica estão dentro do círculo unitário se:

$$\begin{cases} 1 - (a_2)^2 > 0 \\ \dfrac{1 - a_2}{1 + a_2} \left[(1 + a_2)^2 - (a_1)^2\right] > 0 \end{cases}$$

Isto leva às condições:

$$\begin{cases} a_2 < 1 \\ a_2 > -1 + a_1 \\ a_2 > -1 - a_1 \end{cases}$$

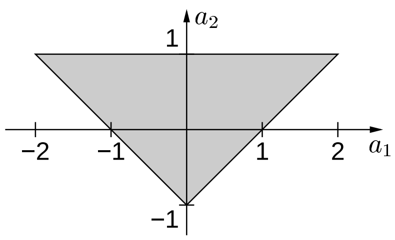


Figura 6.3: Área de estabilidade para uma equação discreta de segunda ordem

A área de estabilidade no plano $a_1 \times a_2$ que corresponde ao atendimento destas três condições é mostrada na figura 6.3. ■

6.6 Controlabilidade

Seja um sistema linear contínuo descrito por um modelo no espaço de estados, ou seja:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathsf{A}\mathbf{x} + \mathsf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathsf{C}\mathbf{x} + \mathsf{D}\mathbf{u} \end{cases} \tag{6.1}$$

Este sistema é dito ser *controlável* se sempre existe um sinal de controle $\mathbf{u}(t)$ que transfira o sistema de qualquer estado inicial $\mathbf{x}(0)$ para qualquer outro estado desejado, $\mathbf{x}(t)$.

Pode-se determinar se um sistema de ordem n é controlável examinando-se a sua matriz de controlabilidade $\mathbf{P}$, que depende unicamente das matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \tag{6.2}$$

No caso geral, para que o sistema seja controlável, o posto[3] da matriz de controlabilidade deve ser igual à ordem do sistema:

$$\operatorname{posto} \mathbf{P} = n \tag{6.3}$$

[3] O posto de uma matriz é o número de linhas (ou de colunas) linearmente independentes desta matriz.

Para um sistema monovariável, $\mathbf{P}$ é uma matriz quadrada $n \times n$. Logo, se o determinante da matriz de controlabilidade for não-nulo, o sistema é controlável:

$$\det \mathbf{P} \neq 0 \tag{6.4}$$

Um outro método de se determinar se um sistema é controlável é desenhar o diagrama de fluxo de sinal correspondente ao modelo no espaço de estados e em seguida verificar se há um caminho do sinal de controle para cada uma das variáveis de estado. Se estes caminhos existem, então cada variável de estado pode ser controlada e o sistema é controlável.

Na seção 2.7.2, uma das formas usuais de obtenção da representação no espaço de estados de um sistema a partir da função de transferência foi denominada de *forma canônica controlável*. A figura 2.14 mostra a representação em diagrama de blocos deste tipo de modelo, que corresponde ao grafo de fluxo de sinal da figura 6.4. Nota-se que há um caminho direto do sinal de controle para cada uma das variáveis de estado, o que faz com que os sistemas representados por esta forma canônica sejam sempre controláveis.

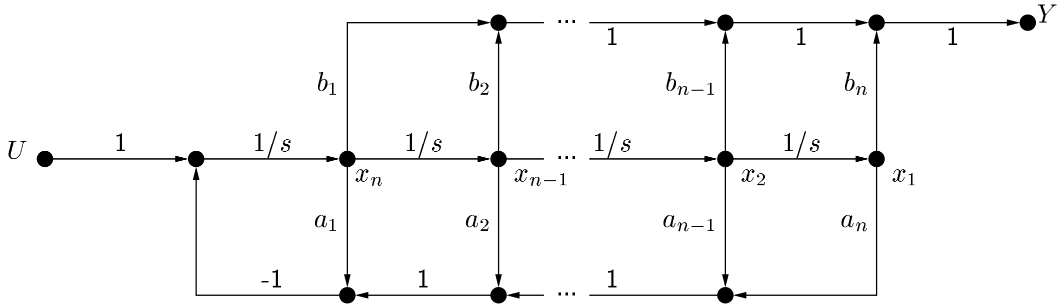


Figura 6.4: Grafo de fluxo de sinal correspondente à forma canônica controlável

Exemplo 6.6-A: Controlabilidade de um sistema de segunda ordem

Determine as condições de controlabilidade de um sistema representado pelas equações de estado:

$$\dot{x}_1 = -2x_1 + u \qquad \dot{x}_2 = -3x_2 + dx_1 \qquad y = x_2$$

O grafo de fluxo de sinal deste sistema está representado na figura 6.5. Se $d = 0$, não existe um caminho direto do sinal de controle para a variável de estado x_2. Portanto, o sistema só é controlável se $d \neq 0$.

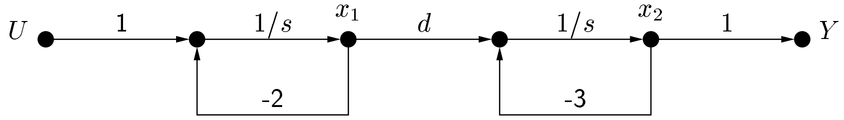


Figura 6.5: Grafo de fluxo de sinal do exemplo 6.6-A

Pode-se confirmar este resultado através da matriz de controlabilidade. Para este sistema:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ d & -3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} -2 \\ d \end{bmatrix}$$

Com isto:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & d \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det \mathbf{P} = d$$

O determinante da matriz de controlabilidade é igual a d, que só é não-nulo se d for não-nulo, de modo que esta é a condição para que o sistema seja controlável. ■

6.6.1 Controlabilidade em sistemas discretos (A FAZER)

Esta seção ainda não foi feita.

6.7 Observabilidade

A propriedade da *observabilidade* refere-se à habilidade de se estimar as variáveis de estado. Seja um sistema linear contínuo descrito pelo modelo no espaço de estados da equação 6.1. Este sistema é dito ser observável se, e somente se, há um tempo finito T tal que o estado inicial $\mathbf{x}(0)$ pode ser determinado a partir da observação do sinal de saída $\mathbf{y}(t), 0 \leq t \leq T$, conhecido o sinal de controle $\mathbf{u}(t), 0 \leq t \leq T$.

Pode-se determinar se um sistema de ordem n é observável examinando-se a sua matriz de observabilidade $\mathbf{Q}$, que depende unicamente das matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \tag{6.5}$$

No caso geral, para que o sistema seja observável, o posto da matriz de observabilidade deve ser igual à ordem do sistema:

$$\text{posto}\, \mathbf{Q} = n \tag{6.6}$$

Para um sistema monovariável, $\mathbf{Q}$ é uma matriz quadrada $n \times n$. Logo, se o determinante da matriz de observabilidade for não-nulo, o sistema é observável:

$$\det \mathbf{Q} \neq 0 \tag{6.7}$$

Diz-se que um sistema é observável se a saída tem um componente devido a cada variável de estado. Assim, um outro método de se determinar se um sistema é observável é desenhar o diagrama de fluxo de sinal correspondente ao modelo no espaço de estados e verificar se há um caminho de cada uma das variáveis de estado para o sinal de saída.

Na seção 2.7.2, uma das formas usuais de obtenção da representação no espaço de estados de um sistema a partir da função de transferência foi denominada de *forma canônica observável*. A figura 2.15 mostra a representação em diagrama de blocos deste tipo de modelo, que corresponde ao grafo de fluxo de sinal da figura 6.6. Nota-se que há um caminho direto de cada uma das variáveis de estado para o sinal de saída, o que faz com que os sistemas representados por esta forma canônica sejam sempre observáveis.

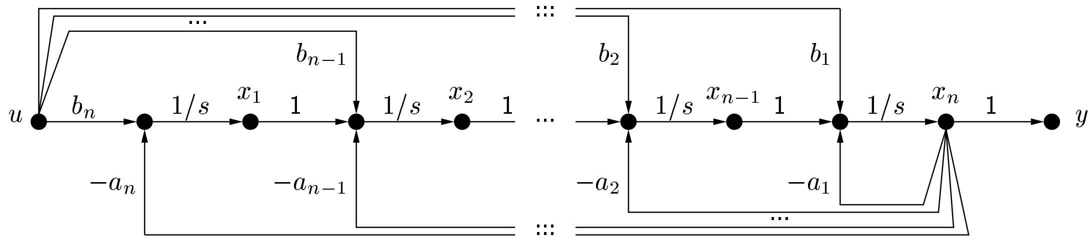


Figura 6.6: Grafo de fluxo de sinal correspondente à forma canônica observável

Exemplo 6.7-A: Determinação de controlabilidade e observabilidade

Determine se o sistema representado pelas equações de estado a seguir é controlável e observável:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u \qquad\qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

Para este sistema:

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad\qquad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{CA} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad\qquad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Tanto o determinante da matriz $\mathbf{P}$ quanto da matriz $\mathbf{Q}$ são nulos, o que demonstra que este sistema não é nem controlável nem observável. ■

6.7.1 Observabilidade em sistemas discretos (A FAZER)

Esta seção ainda não foi feita.

Exercícios

A. Resolva o seguinte sistema de inequações:

$$\begin{cases} \dfrac{k^2+4k+3}{k(k+2)} > 0 \\ \dfrac{k}{k+1} > 0 \end{cases}$$

B. Utilizando o critério de Routh-Hurwitz, determine a estabilidade e o número de raízes no semiplano direito dos polinômios abaixo:

1. $s^3 + 13s^2 + 33s + 30$
2. $s^4 + 2s^3 + 2s^2 + 3s + 6$
3. $s^4 + s^3 + 2s^2 + 9s + 5$
4. $s^3 + 5s^2 + 8s + 6$
5. $s^3 + 7s^2 + 16s + 10$
6. $s^4 + 12s^3 + 54s^2 + 108s + 80$
7. $s^4 + 7s^3 + 12.2s^2 + 11.05s$
8. $s^5 + 3s^4 + 28s^3 + 226s^2 + 600s + 400$

C. Para um sistema de controle com realimentação negativa unitária e função de transferência em malha aberta a seguir, determine os valores de K para os quais o sistema é estável.

$$G(s) = \frac{K(s+2)}{s(s+5)(s^2+2s+5)}$$

D. Um sistema de controle com realimentação negativa unitária cuja função de transferência em malha aberta é dada a seguir tem dois parâmetros a serem selecionados (k_1 e k_2):

$$G(s) = \frac{k_2}{s^4 + 10s^3 + k_1 s^2 + 2s}$$

Represente graficamente a região de estabilidade do sistema em termos de k_1 e k_2.

E. Utilizando o critério de Jury, determine a estabilidade e, quando possível, o número de raízes fora do círculo unitário dos polinômios abaixo:

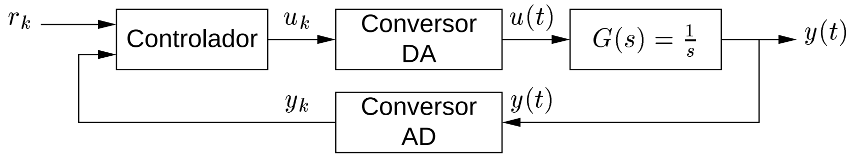
1. $z^2 - 1.5z + 0.9$
2. $z^3 - 3z^2 + 2z - 0.5$
3. $z^3 - 2z^2 + 2z - 0.5$
4. $z^3 + 5z^2 - 0.25z - 1.25$
5. $z^3 - 1.7z^2 + 1.7z - 0.7$
6. $z^3 + 1.7z^2 + 1.7z + 0.7$

F. Considere um sistema com realimentação negativa unitária e função de transferência discreta em malha aberta $G(z)$ a seguir. Determine os valores de K para os quais o sistema em malha fechada é estável.

$$G(z) = K\frac{4z+1}{z^2+z+0.16}$$

G. Considere o sistema amostrado da figura a seguir. Assuma que a amostragem é feita periodicamente com período T e que o conversor DA implementa um segurador de ordem zero. A lei de controle implementada pelo controlador é $u_k = K(r_k - y_k)$.

1. Qual é o maior valor do ganho K do controlador para o qual o sistema amostrado em malha fechada é estável?
2. Compare o resultado anterior com a faixa de estabilidade do sistema contínuo correspondente, ou seja, excluindo-se os conversores AD e DA e implementando-se um controlador $u(t) = K[r(t) - y(t)]$.



H. Assuma que o sistema descrito pela equação de diferenças:

$$y_k - 1.2y_{k-1} + 0.5y_{k-2} = 0.4u_{k-1} + 0.8u_{k-2}$$

é controlado pela lei de controle $u_k = -Ky_k$.

1. Determine para quais valores de K o sistema em malha fechada é estável.
2. Assuma agora que há um atraso computacional no controlador, de forma que a lei de controle é $u_k = -Ky_{k-1}$. Para quais valores de K o novo sistema é estável?

I. Um sistema é representado pela equação de estados a seguir:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \qquad\qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

1. Desenhe o diagrama de fluxo de sinal correspondente a este modelo, indicando as variáveis de estado.
2. Determine se o sistema é controlável.
3. Determine se o sistema é observável.

J. Um sistema é representado pela equação de estados a seguir. Para quais valores de b_1 e b_2 o sistema é controlável?

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u$$

K. Um sistema tem uma função de transferência a seguir. Obtenha para este sistema, se possível, uma representação em variáveis de estado que seja controlável e observável.

$$G(s) = \frac{4}{s(s^2 + 5s + 4)}$$

L. Um sistema é representado pela seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y = \frac{du}{dt} + u$$

onde y é a saída e u é a entrada.

1. Desenvolva a representação deste sistema na forma canônica controlável e mostre que (obviamente) ela é controlável.
2. Defina as variáveis de estado como sendo $x_1 = y$ e $x_2 = dy/dt - u$ e determine se este novo sistema também é controlável. Note que a controlabilidade é uma propriedade do modelo, e não do sistema, pois depende da definição das variáveis de estado.

Capítulo 7

Análise em regime permanente

7.1 Introdução

A propriedade da estabilidade nos garante que, após um período transitório, o sistema se fixará em um modo de funcionamento permanente. A análise em regime permanente se preocupa não apenas em ter certeza que o sistema estabilizará em um modo de comportamento estável, mas também em garantir que este modo de comportamento para o qual o sistema vai evoluir corresponde ao comportamento desejado. Dito de outra forma, trata-se da análise do chamado *erro estacionário*, ou *erro de regime*, do sistema, que constitui o principal conceito abordado neste capítulo.

7.2 Erro estacionário

Um sistema de controle é útil porque permite ao engenheiro ajustar o comportamento da saída a partir do sinal de entrada. O *erro estacionário*, ou *erro de regime*, é a diferença entre os sinais de entrada e de saída depois que todos os sinais transitórios decaíram, deixando apenas a resposta permanente no sinal de saída. Esta análise evidentemente só faz sentido para sistemas estáveis.

A diminuição da sensibilidade do erro estacionário às variações nos parâmetros do sistema é uma das principais razões para se utilizar realimentação em sistemas de controle. Isto pode ser demonstrado calculando-se o erro de regime para os dois tipos de sistema.

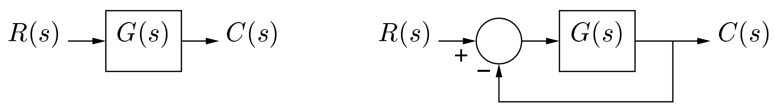


Figura 7.1: Sistemas típicos em malha aberta e em malha fechada

Para um sistema em malha aberta da figura 7.1 a transformada de Laplace do erro é:

$$E(s) = R(s) - C(s) = [1 - G(s)]R(s)$$

O erro do sistema com realimentação negativa unitária da figura 7.1 é tal que:

$$E(s) = R(s) - C(s) = [1 - G_{MF}(s)]R(s) = \left[1 - \frac{G(s)}{1+G(s)}\right]R(s) = \left[\frac{1}{1+G(s)}\right]R(s)$$

Para calcular o valor estacionário do erro e_{SS}, utiliza-se o teorema do valor final da transformada de Laplace:

$$e_{SS} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s)$$

Utilizando uma entrada degrau unitário nos dois sistemas para efeito de comparação, obtém para o sistema em malha aberta:

$$e_{SS} = \lim_{s\to 0} s[1 - G(s)]R(s) = \lim_{s\to 0} s[1 - G(s)]\frac{1}{s} = \lim_{s\to 0}[1 - G(s)] = 1 - G(0)$$

Para o sistema em malha fechada, tem-se:

$$e_{SS} = \lim_{s\to 0} s\left[\frac{1}{1+G(s)}\right]\frac{1}{s} = \frac{1}{1+G(0)}$$

O valor de $G(s)$ quando $s = 0$ é normalmente denominado ganho CC, pois dá o fator de multiplicação em regime entre entrada e saída para uma entrada degrau. Nota-se que o sistema em malha aberta pode ter um erro estacionário nulo simplesmente ajustando-se o valor do ganho CC para que o sistema tenha $G(0) = 1$. Qual é então a vantagem do sistema em malha fechada neste caso?

No sistema em malha aberta, pode-se calibrar o sistema de forma que $G(0) = 1$, mas durante a operação do sistema é inevitável que os parâmetros de $G(s)$ mudem por envelhecimento ou por mudança das condições do ambiente. Como se trata de um sistema em malha aberta, o erro estacionário permanecerá diferente de zero até que o sistema seja recalibrado. Já o sistema em malha fechada continuamente monitora o erro e gera um sinal de entrada para a planta de forma a reduzir o valor de regime do erro.

A menor sensibilidade a variações nos parâmetros dos sistemas em malha fechada pode ser percebida em um exemplo. Seja uma planta com função de transferência:

$$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1}$$

O erro estacionário em malha aberta é:

$$e_{ss} = 1 - G(0) = 1 - K$$

Este erro pode ser feito nulo adotando-se $K = 1$. Para o sistema em malha fechada,

$$e_{ss} = \frac{1}{1+G(0)} = \frac{1}{1+K}$$

Neste caso, o erro nunca é nulo. Pode-se reduzi-lo adotando um ganho elevado. Por exemplo, para $K = 100$, o erro estacionário seria de $e_{SS} = 0.0099$. Comparando-se estas duas situações, a configuração em malha aberta parece ser superior.

A vantagem da realimentação aparece quando ocorrem variações nos parâmetros. Por exemplo, vamos supor uma variação de 20% no valor do ganho K. No sistema em malha aberta, o ganho passa de $K = 1$ a $K = 0.8$, o que faz com que o erro em regime passe de $e_{SS} = 0$ a $e_{SS} = 0.2$. Já no sistema em malha fechada, o ganho passa de $K = 100$ a $K = 80$, o que faz com que o erro em regime passe de $e_{SS} = 0.0099$ a $e_{SS} = 0.012$. A variação de 20% no valor do ganho se refletiu integralmente no sinal de saída no caso em malha aberta, enquanto que no sistema em malha fechada ocorreu uma variação de apenas 0.21% no valor do sinal de saída.

7.3 Erro atuante estacionário

Para sistemas realimentados, além do erro tradicional (diferença entre o sinal de entrada e o sinal de saída), define-se também o erro atuante $e_a(t)$, que é a diferença entre o sinal de entrada e o sinal realimentado. A figura 7.2 ilustra esta definição do erro atuante: note-se que, para sistemas com realimentação negativa unitária onde $H(s) = 1$, o erro e o erro atuante são equivalentes.

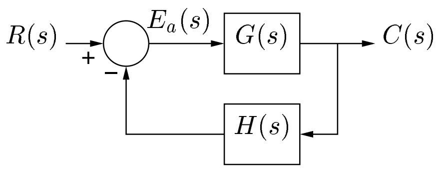


Figura 7.2: Definição do erro atuante

Da figura 7.2:

$$E_a(s) = R(s) - H(s)C(s) = R(s) - H(s)G(s)E_a(s) \quad \Rightarrow \quad E_a(s) = \frac{1}{1 + G(s)H(s)}R(s)$$

Da mesma forma que para o erro, pode-se calcular o erro atuante estacionário (ou seja, o valor de regime do erro atuante) utilizando o teorema do valor final da transformada de Laplace:

$$e_{aSS} = \lim_{t\to\infty} e_a(t) = \lim_{s\to 0} sE_a(s) = \lim_{s\to 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

É útil, para efeito de comparação, determinar-se o erro atuante estacionário para três entradas bastante usuais em análise de sistemas de controle: entrada degrau, entrada rampa e entrada parábola.

7.3.1 Entrada degrau

O erro atuante estacionário para uma entrada degrau unitário $r(t) = 1$ é de:

$$e_{aSS} = \lim_{s\to 0} \frac{s(1/s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{1}{1 + G(0)H(0)}$$

Claramente, é a função de transferência de malha aberta $G(s)H(s)$ que determina o erro atuante estacionário. Esta função de transferência pode ser escrita de forma geral como:

$$G(s)H(s) = \frac{K\prod_{i=1}^{M}(s+z_i)}{s^N\prod_{k=1}^{Q}(s+p_k)}$$

O número N de integradores puros (ou seja, pólos na origem) da função de transferência em malha aberta do sistema é freqüentemente denominado o *tipo* do sistema.

Para um sistema tipo 0 ($N = 0$), o erro atuante estacionário para entrada degrau é:

$$e_{aSS} = \frac{1}{1+G(0)H(0)} = \frac{1}{1+\frac{K\prod_{i=1}^{M}z_i}{\prod_{k=1}^{Q}p_k}}$$

A constante $G(0)H(0)$ é denominada K_p, a *constante de erro de posição*, de modo que:

$$e_{aSS} = \frac{1}{1+K_p}$$

Para sistemas tipo 1 ou superior, o erro atuante estacionário para entrada degrau é nulo, pois a constante K_p tende a infinito.

7.3.2 Entrada rampa

O erro atuante estacionário para uma entrada rampa unitário $r(t) = t$ é de:

$$e_{aSS} = \lim_{s\to 0}\frac{s(1/s^2)}{1+G(s)H(s)} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{s+sG(s)H(s)} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{sG(s)H(s)}$$

Novamente, o erro atuante estacionário depende do tipo do sistema. Para um sistema tipo 0, o erro atuante estacionário é infinito. Para um sistema tipo 1:

$$e_{aSS} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{s\left[\frac{K\prod_{i=1}^{M}(s+z_i)}{s\prod_{k=1}^{Q}(s+p_k)}\right]} = \frac{1}{\frac{K\prod_{i=1}^{M}z_i}{\prod_{k=1}^{Q}p_k}} = \frac{1}{K_v}$$

onde a constante K_v é denominada *constante de erro de velocidade*. Para sistemas tipo 2 ou superior, o erro atuante estacionário para entrada rampa é nulo.

7.3.3 Entrada parábola

O erro atuante estacionário para uma entrada parábola unitário $r(t) = t^2/2$ é de:

$$e_{aSS} = \lim_{s\to 0}\frac{s(1/s^3)}{1+G(s)H(s)} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{s^2G(s)H(s)}$$

Para sistemas tipo 0 ou tipo 1, o erro atuante estacionário é infinito. Para um sistema tipo 2, obtém-se:

$$e_{aSS} == \frac{1}{\frac{K\prod_{i=1}^{M} z_i}{\prod_{k=1}^{Q} p_k}} = \frac{1}{K_a}$$

onde a constante K_a é denominada *constante de erro de aceleração*. Para sistemas tipo 3 ou superior, o erro atuante estacionário para entrada parábola é nulo.

O sumário do erro atuante estacionário para as três entradas principais dos vários tipos de sistema é sumarizado na tabela 7.1. Se o sistema em malha aberta tem p integradores, então o erro será zero em regime (desde que o sistema em malha fechada seja estável) para sinais de referência que são polinômios de ordem menor ou igual a $p-1$. Para o caso mais freqüente da entrada degrau (polinômio de ordem zero), é importante lembrar que um único pólo na origem garante o erro atuante estacionário nulo.

Tipo do sistema	Entrada		
	Degrau	Rampa	Parábola
0	$\frac{1}{1+K_p}$	∞	∞
1	0	$\frac{1}{K_v}$	∞
2	0	0	$\frac{1}{K_a}$
3	0	0	0

Tabela 7.1: Sumário das fórmulas de cálculo do erro atuante estacionário

Como ilustração, a figura 7.3 apresenta o comportamento esperado de um sistema tipo 1 com realimentação negativa unitária para os três tipos de entrada. O sinal de saída do sistema segue perfeitamente uma entrada degrau, acompanha com atraso constante uma entrada rampa e se distancia cada vez mais de uma entrada parábola.

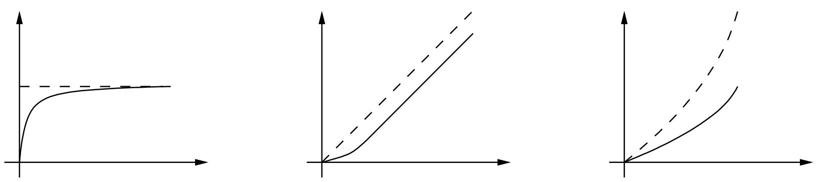


Figura 7.3: Comportamento de um sistema tipo 1 para vários tipos de entrada

Para sistemas com realimentação negativa unitária, a análise baseada no tipo do sistema pode ser empregada para se determinar tanto o erro atuante estacionário quanto o erro estacionário, já que os dois são idênticos. Quando a realimentação não é unitária, a determinação do erro estacionário deve ser feita a partir da análise da função de transferência, como ilustra o exemplo 7.3-A a seguir.

Exemplo 7.3-A:

Seja um sistema descrito pelo diagrama da figura 7.2 com

$$G(s) = \frac{K}{s(s+2)} \qquad H(s) = \frac{2}{s+4}$$

Determine o erro atuante estacionário e o erro estacionário para este sistema supondo entradas degrau, rampa e parábola unitários.

Para a determinação do erro atuante estacionário:

$$G(s)H(s) = \frac{2K}{s(s+2)(s+4)}$$

A constante de erro de velocidade do sistema é:

$$K_v = \frac{2K}{2 \cdot 4} = \frac{K}{4}$$

Como se trata de um sistema tipo 1, o erro estacionário para uma entrada degrau unitário é nulo, vale $1/K_v = 4/K$ para uma entrada rampa unitária e é infinito para uma entrada parábola unitária.

Para o cálculo do erro estacionário, é preciso determinar a função de transferência em malha fecha do sistema:

$$G_{MF}(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{K(s+4)}{s(s+2)(s+4)+2K}$$

O erro estacionário é dado por:

$$e_{SS} = \lim_{s \to 0} s[1 - G_{MF}(s)]R(s) = \lim_{s \to 0} s \left[\frac{s^3+6s^2+(8-K)s-2K}{s^3+6s^2+8s+2K} \right] R(s)$$

Para uma entrada degrau unitário, $R(s) = 1/s$ e:

$$e_{SS} = \lim_{s \to 0} \left[\frac{s^3+6s^2+(8-K)s-2K}{s^3+6s^2+8s+2K} \right] = -1$$

Para uma entrada rampa unitário, $R(s) = 1/s^2$ e:

$$e_{SS} = \lim_{s \to 0} \left[\frac{s^3+6s^2+(8-K)s-2K}{s(s^3+6s^2+8s+2K)} \right] = -\infty$$

Para uma entrada rampa unitária, $R(s) = 1/s^3$ e:

$$e_{SS} = \lim_{s \to 0} \left[\frac{s^3+6s^2+(8-K)s-2K}{s^2(s^3+6s^2+8s+2K)} \right] = -\infty$$

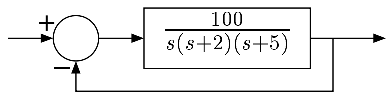
Estes erros de regime acontecem porque há uma diferença entre o sinal de saída e o sinal fornecido pelo sensor. ■

7.4 Valores estacionários em sistemas discretos (A FAZER)

ESTA SEÇÃO AINDA NÃO FOI ESCRITA

Exercícios

A. Dado o sistema a seguir, calcule o erro de regime para entrada degrau, rampa e parábola.



B. A função de transferência em malha aberta de um sistema com realimentação negativa unitária é dada a seguir. Calcule o erro de regime para uma entrada $r(t) = 2 + 3t$.

$$G(s) = \frac{K(s+1)}{s(s-1)(s^2+4s+16)}$$

C. Um sistema tem função de transferência em malha fechada dada por:

$$G_{MF}(s) = \frac{96(s+3)}{(s+8)(s^2+8s+36)}$$

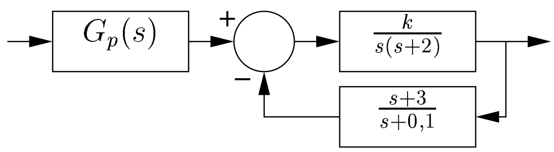
Determine o erro de regime para uma entrada degrau unitário.

D. Mostre que o erro de regime em resposta a entradas em rampa é nulo para sistemas com função de transferência em malha fechada dadas por:

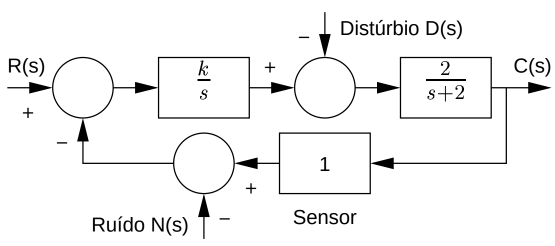
$$G_{MF}(s) = \frac{a_{n-1}s + a_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n}$$

E. Para o sistema de controle a seguir:

1. determine o erro de regime para entradas degrau unitário quando $G_p(s) = 1$; e
2. selecione um $G_p(s)$ tal que o erro de regime seja nulo para entradas degrau unitário.

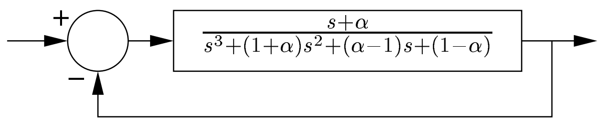


F. Um sistema de controle realimentado com ruído no sensor e uma entrada de distúrbio é indicado na figura a seguir. O objetivo é estudar os efeitos do ruído e do distúrbio na saída: assuma portanto $R(s) = 0$ e só uma das perturbações não-nulas de cada vez.



1. Determine $C(s)$ e o erro de regime para $D(s) = A/s$.
2. Determine $C(s)$ e o erro de regime para $N(s) = B/s$.

G. Deseja-se que o sistema de controle abaixo tenha erro estacionário para uma entrada degrau menor que 5%. Determine a faixa de valores possíveis para α.



H. Um sistema com realimentação negativa unitária tem dois parâmetros a serem selecionados (k e T) na sua função de transferência em malha aberta:

$$G(s) = \frac{k(s+2)}{s(1+Ts)(1+2s)}$$

1. Trace as regiões de estabilidade do sistema no plano $k \times T$.
2. Selecione T e k tais que o erro estacionário para uma entrada em rampa seja menor ou igual a 25% da magnitude da entrada.

Capítulo 8

Análise em regime transitório

8.1 Introdução

A habilidade de se poder ajustar as respostas transitória e estacionária é uma das grandes vantagens dos sistemas de controle. Para analisar e projetar um sistema, devemos definir e medir seu desempenho, comparando-o com as especificações do projeto. A análise quanto ao atendimento das especificações de regime permanente foi feita no capítulo 7. Neste capítulo veremos os métodos de análise ligados ao comportamento do sistema durante a fase transitória inicial.

8.2 Sistemas de primeira ordem

Vamos considerar um sistema de primeira ordem genérico:

$$T\dot{y} + y = Ku \quad \Rightarrow \quad G(s) = \frac{K}{Ts+1} \tag{8.1}$$

Este sistema tem um pólo em $s = -1/T$. Suporemos T maior que zero, o que garante a estabilidade do sistema. Para uma análise inicial, faremos $K = 1$. Em uma situação onde $K \neq 1$, basta multiplicar o sinal de saída calculado por K.

A resposta $y(t)$ do sistema da equação 8.1 a uma entrada degrau unitário, mostrada na figura 8.1, é dada por:

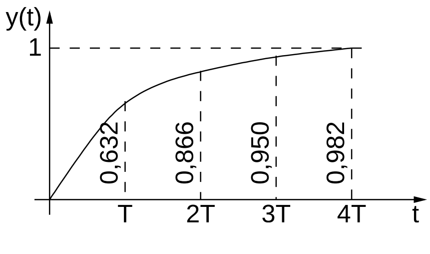


Figura 8.1: Resposta de um sistema de primeira ordem a uma entrada degrau unitário

$$R(s) = \frac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad Y(s) = \frac{1}{Ts+1} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{1}{T}} \quad \Rightarrow \quad y(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}} \tag{8.2}$$

A constante T é conhecida como *constante de tempo* do sistema. Nota-se que a saída de um sistema de primeira ordem atinge 63% do seu valor de regime após T segundos; 95%, após $3T$ segundos; e 98%, após $4T$ segundos. Pode-se considerar portanto que um sistema de primeira ordem estará aproximadamente estabilizado após decorrido um tempo equivalente a três constantes de tempo, caso se utilize uma tolerância de 5%, ou a quatro constantes de tempo, caso a tolerância seja de 2%.

O tempo necessário para que o sinal de saída atinja praticamente o seu valor de regime é conhecido como *tempo de estabilização* e indicado por t_{SS}. Para sistemas de primeira ordem, o tempo de estabilização é conseqüentemente dado por:

$$t_{SS} = 3T \quad \text{(a 5\%)} \qquad\qquad t_{SS} = 4T \quad \text{(a 2\%)} \tag{8.3}$$

Quanto maior a constante de tempo, mais lentamente o sistema atinge a estabilização. Como o pólo dos sistemas de primeira ordem se localiza em $s = -1/T$, quanto mais afastado do eixo imaginário estiver o pólo, mais rápidamente o sistema estabilizará. Estes fatos estão ilustrados na figura 8.2.

Figura 8.2: Influência da constante de tempo e do pólo no tempo de estabilização

A resposta y(t) do sistema da equação 8.1 a uma entrada rampa unitária, mostrada na figura 8.3, é dada por:

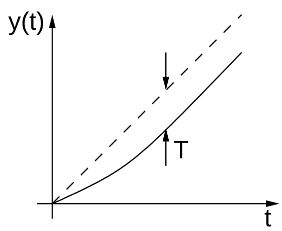


Figura 8.3: Resposta de um sistema de primeira ordem a uma entrada rampa unitária

$$R(s) = \frac{1}{s^2} \quad \Rightarrow \quad Y(s) = \frac{1}{Ts+1} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T}{s+\frac{1}{T}} \quad \Rightarrow \quad y(t) = t - T + Te^{-\frac{t}{T}} \tag{8.4}$$

Conforme se constata no gráfico da figura 8.3, os sistemas de primeira ordem têm um erro estacionário de valor T para uma entrada rampa unitária. Quanto menor a constante de tempo, menor portanto será este erro de regime.

8.3 Sistemas de segunda ordem canônicos

Vamos agora considerar um sistema de segunda ordem sem zeros genérico:

$$\ddot{y} + 2\xi\omega_n\dot{y} + \omega_n^2 y = K\omega_n^2 u \quad \Rightarrow \quad G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \tag{8.5}$$

A constante ξ é denominada *fator de amortecimento* e a constante ω_n, freqüência natural. Suporemos ξ e ω_n maiores que zero, o que garante a estabilidade do sistema.

Inicialmente iremos considerar os sistemas com ganho $K = 1$. Por determinação dos pólos da função de transferência da equação 8.5, constata-se que este tipo de sistema pode recair em três situações distintas, de acordo com o valor da constante ξ:

$\xi > 1$: O sistema tem dois pólos reais distintos e é denominado sobreamortecido.
$\xi = 1$: O sistema tem dois pólos reais iguais e é denominado criticamente amortecido.
$\xi < 1$: O sistema tem dois pólos complexos conjugados e é denominado subamortecido.

8.3.1 Sistemas sobreamortecidos

Para $\xi > 1$, o sistema tem dois pólos reais distintos dados por:

$$p_1 = -\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} \qquad\qquad p_2 = -\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

A resposta $Y(s)$ do sistema a uma entrada degrau unitário é dada por:

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{p_1 p_2}{(s - p_1)(s - p_2)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{c_1}{s - p_1} + \frac{c_2}{s - p_2}$$

onde:

$$c_1 = \frac{1}{2\sqrt{\xi^2 - 1}(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})} \qquad\qquad c_2 = \frac{1}{2\sqrt{\xi^2 - 1}(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})}$$

A resposta $y(t)$ é dada por:

$$\begin{aligned} y(t) &= 1 - c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t} \quad \Rightarrow \\ &= 1 - \frac{1}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} \left[\frac{1}{\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}} e^{-(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n t} - \frac{1}{\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}} e^{-(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n t} \right] \end{aligned} \tag{8.6}$$

Nota-se que, quanto maior o valor de ξ, mais o segundo termo exponencial é desprezível em relação ao primeiro, tanto porque o coeficiente c_2 é menor do que c_1 quanto porque o expoente da exponencial é maior em módulo, o que faz com que a expressão decaia mais rapidamente e sua influência no sinal de saída seja relevante por menos tempo. Portanto, quanto maior o valor de ξ, mais a saída de um sistema de segunda ordem sobreamortecido se comporta como a saída de um sistema de primeira ordem, o que leva à possibilidade de se trabalhar com um modelo aproximado:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{p_1 p_2}{(s - p_1)(s - p_2)} \simeq \frac{-p_1}{s - p_1}$$

O tempo de estabilização t_{SS} para os sistemas sobreamortecidos deve ser calculado por resolução numérica, determinando-se o instante em que a saída do sistema, dada pela equação 8.6, atinge 95% ou 98% do seu valor de regime. Entretanto, quando $\xi \gg 1$ (na prática, $\xi \geq 1.2$), o sistema tem o comportamento similar ao de um sistema de primeira ordem, o que faz com que o tempo de estabilização seja aproximadamente determinado pelas equações 8.3, levando-se em conta a constante de tempo do pólo dominante:

$$t_{SS} \simeq 3T_{\text{dom}} = \frac{3}{|p_1|} \quad \text{(a 5\%)} \qquad\qquad t_{SS} \simeq 4T_{\text{dom}} = \frac{4}{|p_1|} \quad \text{(a 2\%)} \tag{8.7}$$

8.3.2 Sistemas criticamente amortecidos

Para $\xi = 1$, o sistema tem dois pólos reais idênticos dados por:

$$p_1 = p_2 = -\omega_n$$

A resposta y(t) do sistema a uma entrada degrau unitário é dada por:

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + \omega_n)^2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{\omega_n}{(s + \omega_n)^2} - \frac{1}{s + \omega_n} \quad \Rightarrow \quad y(t) = 1 - e^{-\omega_n t}(1 + \omega_n t) \tag{8.8}$$

Para estes sistemas, o valor de t_{SS} deve ser obtido por resolução numérica, determinando-se o instante em que a saída do sistema atinge 95% ou 98% do seu valor de regime. Isto leva à resolução das seguintes equações:

$$\begin{array}{lllll} 1 - e^{\omega_n t_{SS}}(1 + \omega_n t_{SS}) = 0.95 & \Rightarrow & \omega_n t_{SS} = 4.744 & \Rightarrow & t_{SS} = 4.744T \quad \text{(a 5\%)} \\ 1 - e^{\omega_n t_{SS}}(1 + \omega_n t_{SS}) = 0.98 & \Rightarrow & \omega_n t_{SS} = 5.834 & \Rightarrow & t_{SS} = 5.834T \quad \text{(a 2\%)} \end{array} \tag{8.9}$$

Se o fator de amortecimento é próximo de um ($\xi \simeq 1$, na prática $0.8 < \xi < 1.2$), este sistema sobreamortecido ou subamortecido é bastante similar a um criticamente amortecido, de modo que as fórmulas 8.9 podem ser utilizadas com um bom grau de aproximação.

8.3.3 Sistemas subamortecidos

Para $\xi < 1$, o sistema tem um par de pólos complexos conjugados dados por:

$$p_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2} = \sigma \pm j\omega_d$$

A resposta $Y(s)$ do sistema a uma entrada degrau unitário é dada por:

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} - \frac{2\xi\omega_n}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

A resposta $y(t)$ deste sistema, por consulta a uma tabela de transformadas, é dada por:

$$\begin{aligned} y(t) &= 1 - e^{\xi\omega_n t}\left(\cos\omega_d t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_d t\right) \\ &= 1 - \frac{e^{\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\left(\omega_d t + \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right) \end{aligned} \tag{8.10}$$

A parte imaginária (ω_d) do pólo, denominada *freqüência natural amortecida*, dá a freqüência da componente oscilatória do sinal de saída. A figura 8.4 apresenta uma evolução da forma do sinal de saída quando ξ varia de 0 a 1 para uma freqüência natural unitária ($\omega_n = 1$). Nota-se que, quando o fator de amortecimento ξ é igual a 0, a resposta se torna não amortecida e as oscilações permanecem indefinidamente.

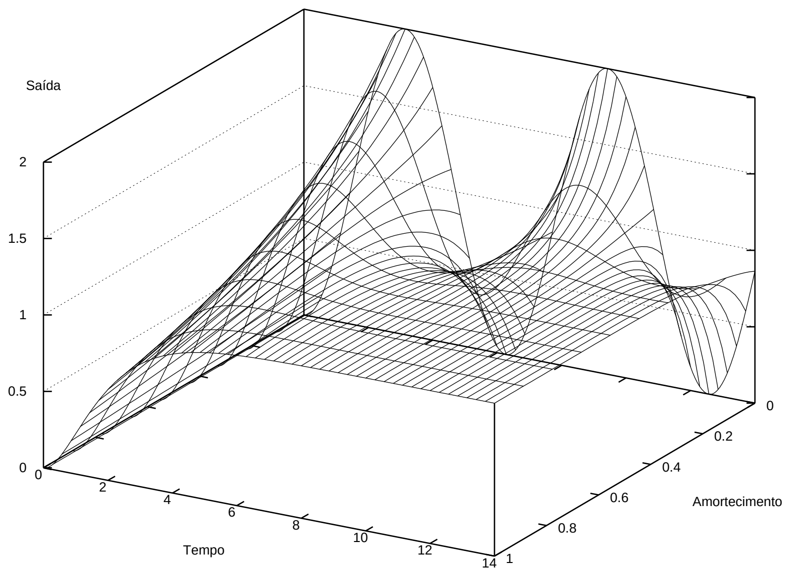


Figura 8.4: Resposta transitória de um sistema subamortecido em função de ξ

O gráfico do sinal de saída é mostrado na figura 8.5 para diversos valores de ξ e com $\omega_n = 1$, inclusive para o caso criticamente amortecimento ($\xi = 1$) e para um caso sobreamortecido ($\xi > 1$). Exceto para algumas aplicações bem particulares onde oscilações não podem ser toleradas, é normalmente desejável que o sistema tenha um fator de amortecimento entre 0.4 e 0.8. Valores pequenos de ξ ($\xi < 0.4$) geram sobressinais excessivos, enquanto sistemas com valores maiores de ξ ($\xi > 0.8$) são desnecessariamente lentos.

Para sistemas subamortecidos de ganho 1 e para uma entrada degrau unitário, as medidas de desempenho transitório estão representadas na figura 8.6. O *tempo de subida*

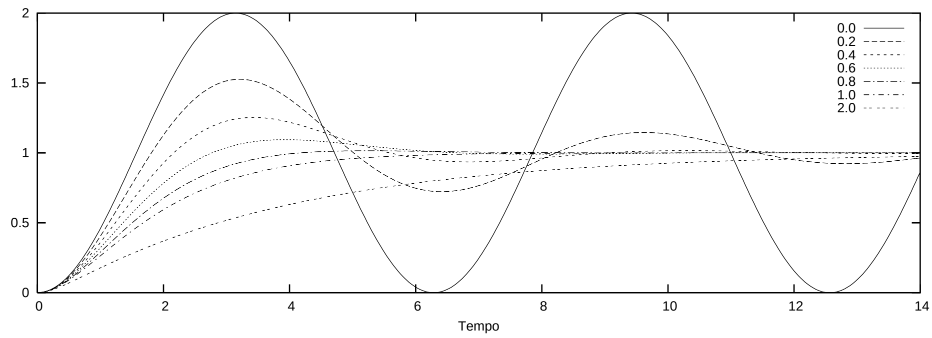


Figura 8.5: Respostas de um sistema de segunda ordem com $\omega_n = 1$ a uma entrada degrau

t_r é o tempo necessário para que o sistema atinja pela primeira vez o seu valor de regime. O *tempo de estabilização* t_{SS} é o tempo necessário para que o sinal de saída fique confinado entre os valores $(1 + \epsilon)$ e $(1 - \epsilon)$, com ϵ geralmente igual a 0.05 (5%) ou 0.02 (2%). O *sobressinal*, ou *overshoot*, é o maior pico do sinal de saída, medido a partir do valor de regime. Geralmente se trabalha com o valor percentual do sobressinal. Finalmente, o *instante de pico* t_p é o momento em que o pico do sobressinal ocorre.

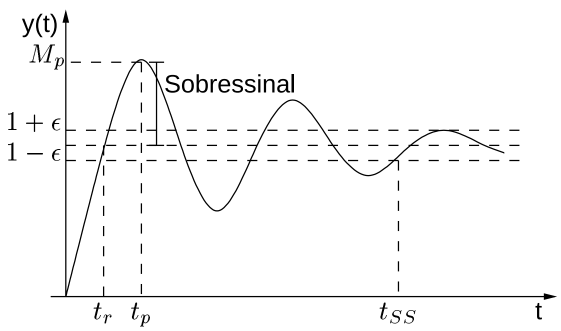


Figura 8.6: Medidas de desempenho de um sistema subamortecido

Para determinação do tempo de subida, faz-se $y(t) = 1$ na equação 8.10 e toma-se a primeira solução. Com isso:

$$t_r = \frac{1}{\omega_d} \tan^{-1}\left(\frac{\omega_d}{-\sigma}\right) = \frac{1}{\omega_d} \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{-\xi}\right) = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} \tag{8.11}$$

onde o ângulo β é definido como sendo o arco cosseno do fator de amortecimento ($\beta = \cos^{-1}\xi$), como mostra a figura 8.7.

O instante de pico pode ser obtido diferenciando-se a equação 8.10, igualando-se o resultado a zero e tomando-se a primeira solução não-nula. Obtém-se o resultado:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \tag{8.12}$$

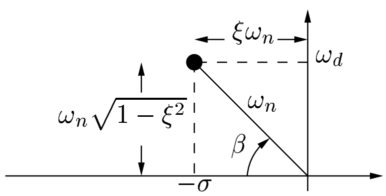


Figura 8.7: Localização dos pólos complexos de um sistema subamortecido

O sobressinal é facilmente obtido a partir deste resultado, pois:

$$M_p = y(t_p) - 1 \quad \Rightarrow \quad M_p = e^{-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\pi} \tag{8.13}$$

O tempo de estabilização t_{SS} é um pouco mais complexo de ser calculado. Para um sistema subamortecido, a resposta transitória é dada pela equação 8.10. Adotando-se por exemplo um critério de erro de 2%, a determinação do tempo de estabilização requer a solução das equações:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin\left(\omega_d t + \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right) &= 0.98 \\ 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin\left(\omega_d t + \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right) &= 1.02 \end{aligned}$$

As raízes destas equações só podem ser determinadas por métodos numéricos, e cada uma das equações pode ter nenhuma[1], uma ou mais de uma solução. O tempo de estabilização t_{SS} será o maior valor dentre todas as raízes de ambas as equações.

Para muitos sistemas subamortecidos, entretanto, não há necessidade de se fazer este cálculo extremamente preciso porém trabalhoso do tempo de estabilização. O sinal de saída $y(t)$ sempre se mantém dentro do par de curvas envoltórias $y_+(t) = 1 + (e^{-\xi\omega_n t}/\sqrt{1-\xi^2})$ e $y_-(t) = 1 - (e^{-\xi\omega_n t}/\sqrt{1-\xi^2})$, como mostrado na figura 8.8. Caso se possa garantir que as curvas envoltórias já decairam suficientemente para estarem dentro da faixa de tolerância $1 \pm \epsilon$, pode-se garantir que o sinal de saída também estará daí por diante dentro da faixa de tolerância. Esta aproximação é conservativa: o tempo de estabilização efetivo do sistema será sempre menor ou igual ao calculado utilizando-se esta aproximação.

A constante de tempo das curvas envoltórias é $T = 1/\xi\omega_n$. Por comparação com os resultados obtidos numericamente, mostra-se que, para sistemas onde $0 < \xi < 0.8$, vale a hipótese simplificadora de supor que o tempo de estabilização do sistema é aproximadamente dado pelo tempo de estabilização das curvas envoltórias, ou seja:

$$t_{SS} \simeq 3T = \frac{3}{\xi\omega_n} \quad (\text{a } 5\%) \qquad\qquad t_{SS} \simeq 4T = \frac{4}{\xi\omega_n} \quad (\text{a } 2\%) \tag{8.14}$$

[1] A primeira equação tem necessariamente ao menos uma raiz.

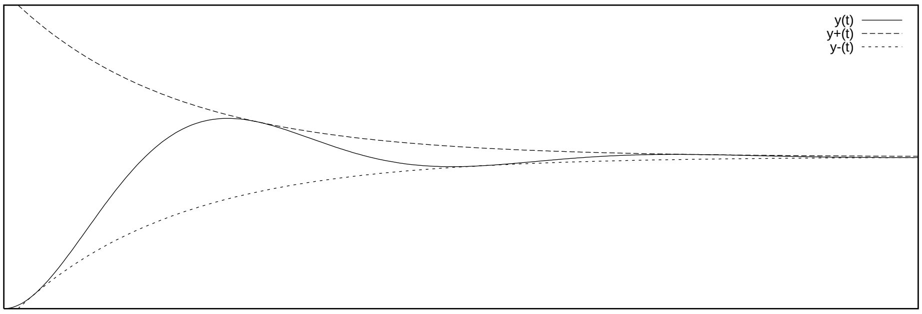


Figura 8.8: Curvas envoltórias da resposta de um sistema subamortecido

Quando mais o fator de amortecimento se aproxima da unidade ($\xi \to 1$), mais o sistema subamortecido se torna similar a um criticamente amortecido, o que faz com que as fórmulas da seção 8.3.2 possam ser utilizadas para obter um resultado aproximado.

Para demonstrar a validadade das diversas fórmulas de cálculo, a tabela 8.1 mostra o valor do tempo de estabilização a 5% e a 2% calculado de maneira exata e aproximada para sistemas de segunda ordem com $w_n = 1$ e diversos valores de ξ, partindo do caso subamortecido, passando pelo criticamente amortecido e chegando ao sobreamortecido.

ξ	t_{SS} 5% real	t_{SS} aproximado	Erro	t_{SS} 2% real	t_{SS} aproximado	Erro
0.2		(eq. 8.7)	%		(eq. 8.7)	%
0.4		(eq. 8.7)	%		(eq. 8.7)	%
0.6		(eq. 8.7)	%		(eq. 8.7)	%
0.8		(eq. 8.7)	%		(eq. 8.7)	%
0.9		(eq. 8.9)	%		(eq. 8.9)	%
1.0		(eq. 8.9)	%		(eq. 8.9)	%
1.1		(eq. 8.9)	%		(eq. 8.9)	%
1.2		(eq. 8.14)	%		(eq. 8.14)	%
1.5		(eq. 8.14)	%		(eq. 8.14)	%
2.0		(eq. 8.14)	%		(eq. 8.14)	%

Tabela 8.1: Tempos de estabilização exatos e aproximados para sistemas de segunda ordem

Exemplo 8.3-A:

Para o sistema de controle da figura 8.9, determine valores para as constantes g e p de maneira que:

- o sobressinal seja inferior a 5%;
- o tempo de estabilização seja inferior a 4s; e
- satisfeitas as restrições anteriores, o sistema atinja o mais rapidamente possível o seu valor de regime (tempo de subida mínimo) e o ganho g seja o menor possível.

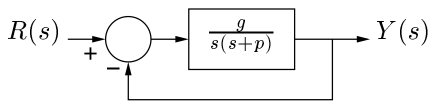


Figura 8.9: Sistema de controle do exemplo 8.3-A

A função de transferência em malha fechada do sistema é:

$$G_{MF}(s) = \frac{g}{s(s+p)+g} = \frac{g}{s^2+ps+g} = \frac{K\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} \quad \Rightarrow$$
$$K = 1 \qquad \xi = \frac{p}{2\sqrt{g}} \qquad \omega_n = \sqrt{g}$$

Como o sobressinal deve ser inferior a 5%:

$$M_p < 5\% \quad \Rightarrow \quad e^{-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\pi} < 0.05 \quad \Rightarrow \quad \xi > 0.69$$

O tempo de subida aumenta quando ξ aumenta. Para ter o menor tempo de subida possível, e consequentemente atingir o mais rapidamente possível o valor de regime, o valor de ξ deve ser o menor possível. Adotaremos portanto $\xi = 0.7$.

O tempo de estabilização deve ser inferior a 4s. Como não foi especificada uma tolerância, adotaremos 2%. Logo:

$$t_{SS} < 4 \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{\xi\omega_n} < 4 \quad \Rightarrow \quad \omega_n > 1.43$$

Para que o ganho g seja o menor possível, a freqüência natural ω_n deve ser a menor possível. Adotaremos portanto $\omega_n = 1.44$. Com isso:

$$g = \omega_n^2 = 2.0736 \qquad p = 2\xi\omega_n = 2.016$$

Estes são os valores ótimos de projeto com base nas especificações de desempenho. ■

8.4 Sistemas de segunda ordem não-canônicos

Os resultados obtidos na seção 8.3 são corretos apenas para uma função de transferência sem zeros finitos. Se o sistema de segunda ordem possui zeros localizados próximos do(s) pólo(s) dominante(s), os zeros vão influenciar a resposta transitória do sistema.

Vamos tomar como base um sistema genérico de segunda ordem com um zero:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2(Ts+1)}{s^2+2\xi\omega_n+\omega_n^2}$$

No caso subamortecido, este sistema tem pólos com parte real $\xi\omega_n$ e um zero em $-1/T$.

Vamos verificar a influência do zero supondo $\omega_n = 1$ e em duas situações: $\xi = 0.2$ e $\xi = 0.625$. Por simulação numérica gerou-se o sinal de saída desses sistemas em cinco casos distintos: $T = 0$ (ou seja, sistema canônico sem zero), $1/T = 10\xi\omega_n$ (em módulo, o zero é 10 vezes maior que a parte real do pólo), $1/T = 5\xi\omega_n$ (o zero é 5 vezes maior), $1/T = \xi\omega_n$ (o zero e a parte real do pólo são iguais) e $1/T = -5\xi\omega_n$ (o zero está no semiplano direito). Na figura 8.10 vê-se o sinal de saída dos sistemas com $\xi = 0.2$ e $\xi = 0.625$, respectivamente, para as diversas localizações do zero. Com base nos sinais simulados, determinou-se numericamente para cada caso o valor do sobressinal e do tempo de estabilização do sistema, valores estes que estão indicados na tabela 8.2

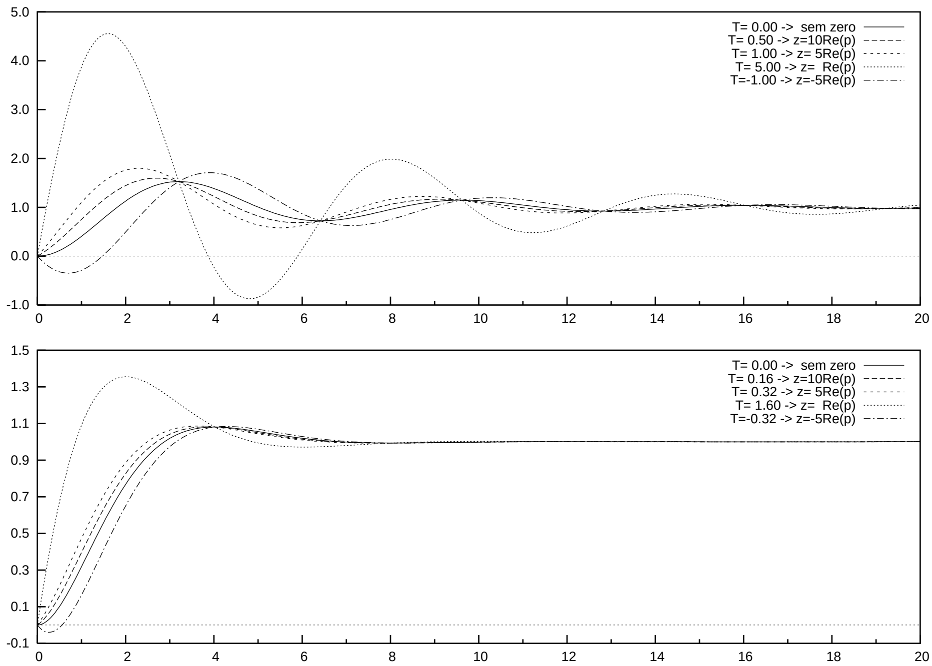


Figura 8.10: Influência de um zero na resposta ao degrau de um sistema

Pelos comportamentos exibidos na figura 8.10 e na tabela 8.2, nota-se que o zero tem uma influência marcante no sobressinal dos sistemas de segunda ordem quando ele se localiza próximo dos pólos dominantes. A influência sobre o tempo de estabilização não é muito significativa, exceto nos casos extremos. Quando o zero está muito mais afastado do eixo imaginário que o pólo, seus efeitos são desprezíveis tanto sobre o sobressinal quanto sobre o tempo de estabilização e o sistema se comporta como um sistema sem zeros.

É interessante se notar o efeito dos zeros no semiplano direito, o que caracteriza os sistemas de fase não-mínima. A existência de zeros nesta configuração leva ao aparecimento de subsinal (valores negativos) no início do transitório (casos com $T < 0$ na figura 8.10 e tabela 8.1). O subsinal também pode aparecer em sistemas com baixo fator de amortecimento e com um zero muito significativo em relação aos pólos, como no caso $\xi = 0.2$ e $T = 5$ ilustrado na figura 8.10 e na tabela 8.1.

$\xi = -\mathrm{Re}(p)$	T	$\frac{1}{T} = -z$	$\frac{z}{\mathrm{Re}(p)}$	Sobressinal	Subsinal	Estabilização (5%)
0.2	0	∞	∞	52.7%	–	13.8
0.2	0.5	2	10	59.7%	–	13.4
0.2	1	1	5	79.8%	–	15.8
0.2	5	0.2	1	355.5%	82.7%	21.8
0.2	-1	-1	-5	70.9%	34.7%	17.2
0.625	0	∞	∞	8.1%	–	5.17
0.625	0.16	6.25	10	8.2%	–	5.01
0.625	0.32	3.125	5	8.6%	–	4.86
0.625	1.6	0.625	1	35.5%	–	4.30
0.625	-0.32	-3.125	-5	8.4%	4.0%	5.48

Tabela 8.2: Influência de um zero nos critérios de desempenho de um sistema

8.5 Sistemas de ordem superior

Quando o sistema tem mais de um pólo com partes reais distintas, o comportamento do sistema é mais influenciado pelo pólo mais próximo do eixo imaginário (pólo dominante) que pelos outros pólos (pólos dominados). Este fato acontece porque a constante de tempo do pólo dominante é maior, o que gera sinais transitórios mais duradouros. Para exemplificar, dois sistemas de quarta ordem cujos pólos estivessem nas posições indicadas na figura 8.11 poderiam ser aproximadamente representados por sistemas de ordem inferior:

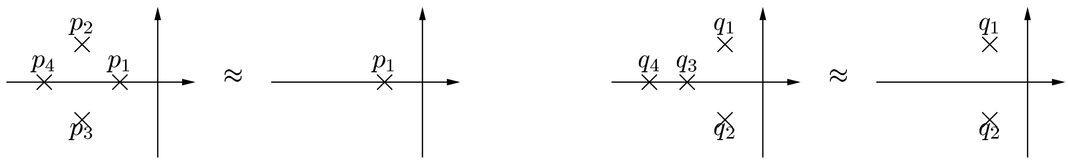


Figura 8.11: Exemplos de aproximação de sistemas com pólos dominantes e dominados

$$
\begin{aligned}
G(s) &= \frac{K}{(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)(s+p_4)} \simeq \frac{K}{p_2 p_3 p_4 (s+p_1)} \\
G(s) &= \frac{K}{(s+q_1)(s+q_2)(s+q_3)(s+q_4)} \simeq \frac{K}{q_3 q_4 (s+q_1)(s+q_2)}
\end{aligned}
$$

Quando o sistema tem vários pólos com partes reais aproximadamente iguais, a relação de dominância não está bem estabelecida. Um sistema nesta situação geralmente tem um tempo de estabilização maior que um outro sistema com um pólo simples na mesma posição. Isto pode ser constatado no caso dos sistemas de segunda ordem: um sistema de primeira ordem com um pólo em $s = -p$ terá um tempo de estabilização a 2% de $t_{SS} = 4/p$, enquanto que um sistema de segunda ordem criticamente amortecido com dois pólos na mesma posição $s = -p$ terá um tempo de estabilização a 2% de $t_{SS} = 5.8/p$.

Exemplo 8.5-A:

Verifique a adequação de uma aproximação de ordem inferior para os sistemas:

$$G_1(s) = \frac{24}{(s+6)(s^2+2s+4)} \qquad G_2(s) = \frac{6}{(s+1.5)(s^2+2s+4)}$$

$$G_1(s) \simeq \frac{24}{6(s^2+2s+4)} = \frac{4}{s^2+2s+4} \qquad G_2(s) \simeq \frac{6}{1.5(s^2+2s+4)} = \frac{4}{s^2+2s+4}$$

O primeiro sistema tem pólos em $s = -6$ e $s = 1 \pm j\sqrt{3}$. Como a relação entre as partes reais é de 1:6, espera-se um bom resultado ao se fazer a aproximação. Já o segundo sistema tem um pólos em $s = -1.5$ e $s = -1 \pm j\sqrt{3}$. Como a relação entre as partes reais é de 1:1.5, a aproximação não deve dar bons resultados. A figura 8.12 apresenta a resposta ao degrau dos sistema exatos e dos aproximados. No primeiro caso há uma semelhança razoável na curva de resposta, enquanto que no segundo caso se constata uma diferença considerável, principalmente no sobressinal. ■

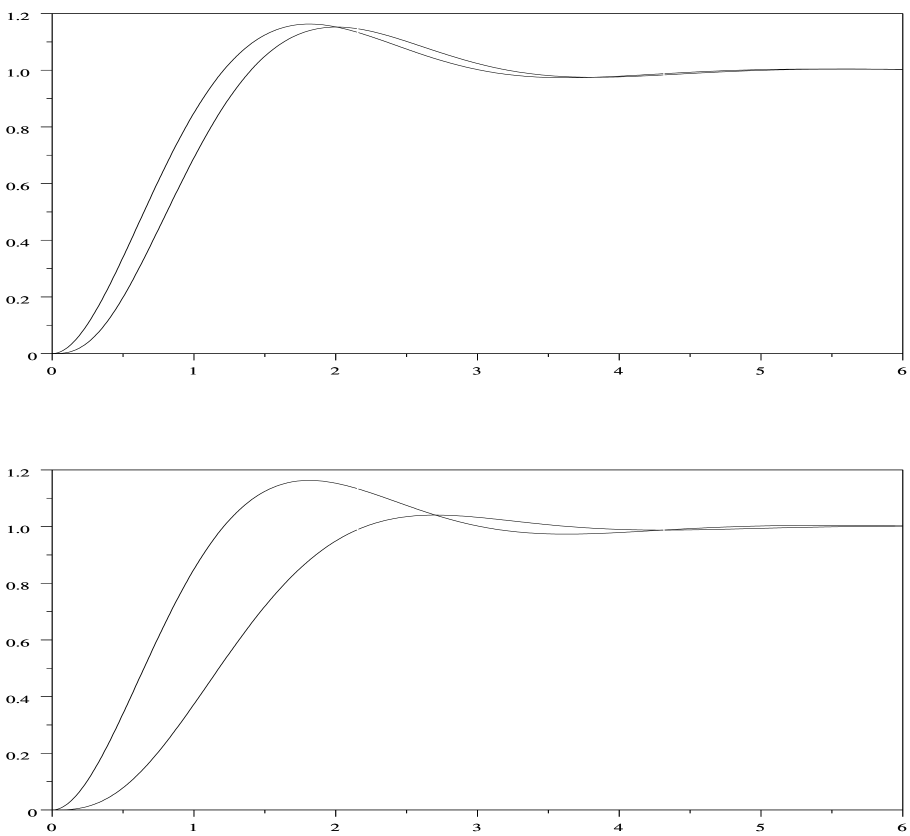


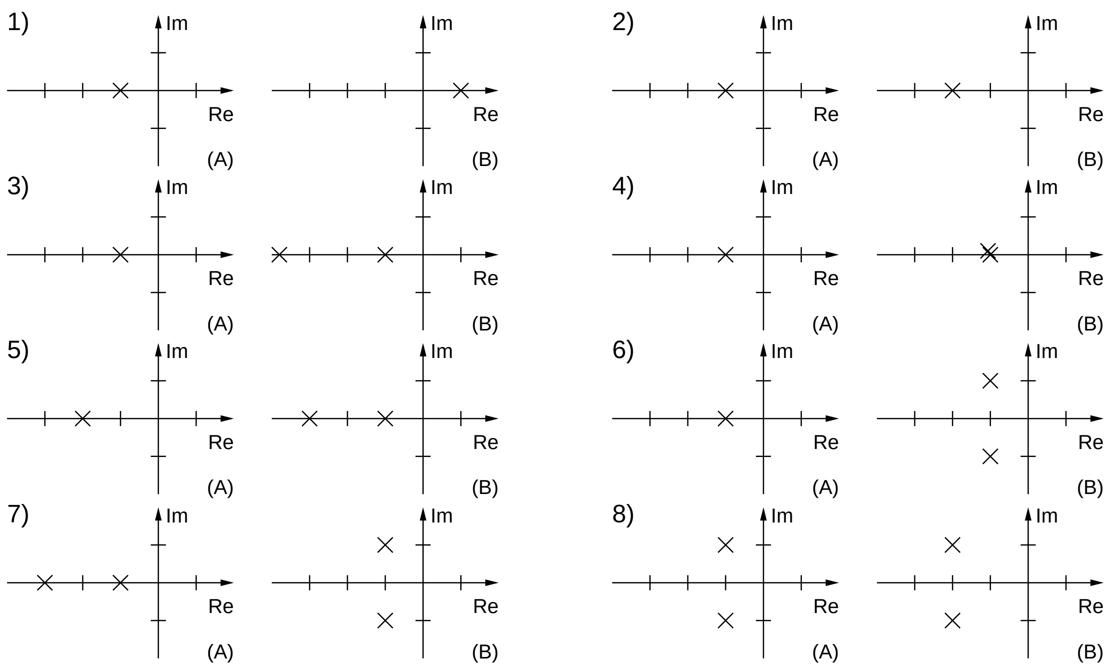
Figura 8.12: Resposta ao degrau de um sistema exato e de um sistema aproximado

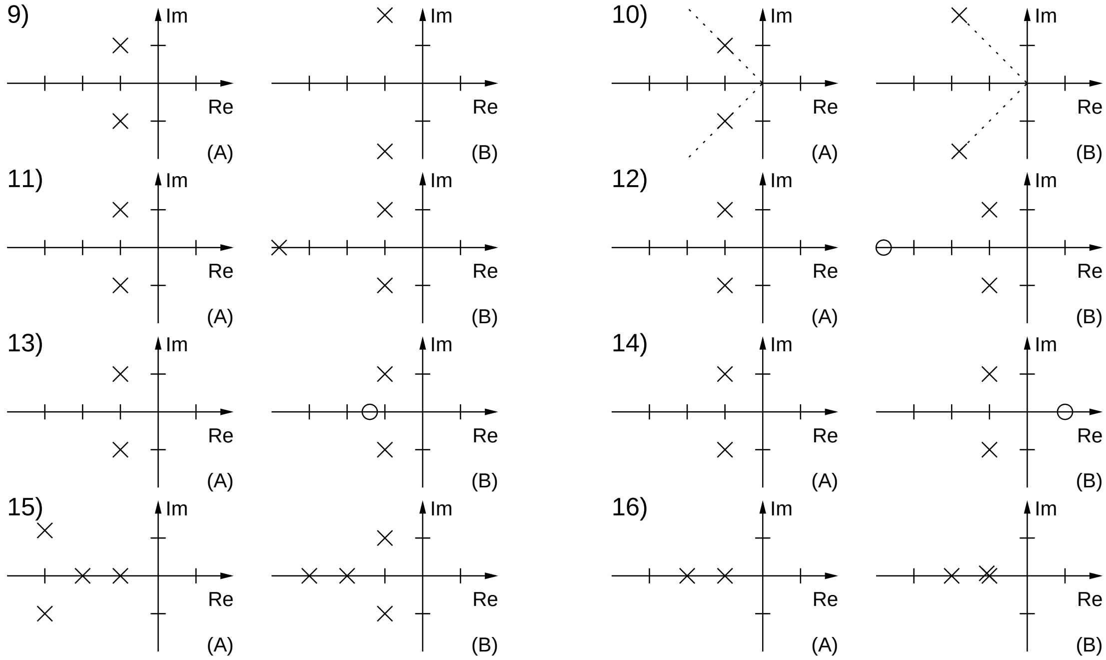
Exercícios

A. Os gráficos a seguir apresentam em escala as localizações no plano complexo dos pólos (representados por um "X") e dos zeros (representados por um "O") de malha fechada de sistemas. São mostrados vários pares de sistemas, sendo cada par formado por um sistema "A" e por um sistema "B". Para cada par, pretende-se comparar os dois sistemas quanto às seguintes características: tempo de estabilização (t_{SS}), sobressinal (M_p), subsinal (M_m) e freqüência de oscilação (ω_d). Para isso, preencha a tabela abaixo, utilizando a seguinte codificação para informar quanto vale a grandeza respectiva naquele sistema:

- 0 Valor nulo ou negligenciável
- ∞ Valor tende a infinito ou muito grande
- $>$ Valor não-nulo, finito e maior que no outro sistema
- $<$ Valor não-nulo, finito e menor que no outro sistema
- $=$ Valor não-nulo, finito e aproximadamente igual ao do outro sistema

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
t_{SS}	A																
	B																
M_p	A																
	B																
ω_d	A																
	B																
M_m	A																
	B																





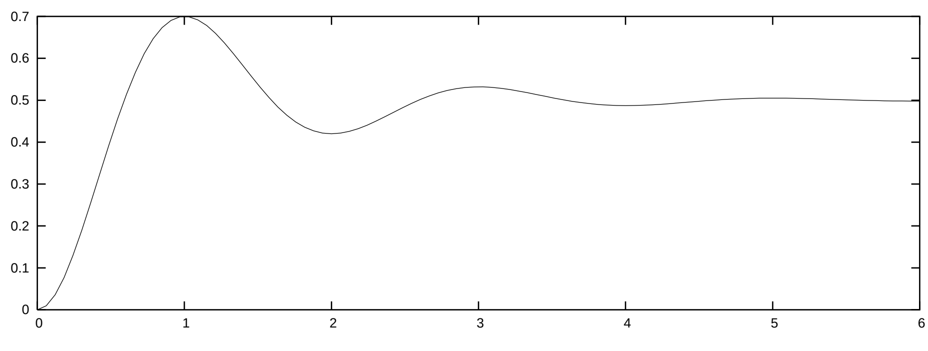
B. A função de transferência de malha aberta de um sistema de controle com realimentação negativa unitária é dada a seguir. Deseja-se uma resposta ao degrau com instante de pico (t_p) anterior a 1.1s e sobre-sinal inferior a 5%. Determine um valor admissível para k.

$$G(s) = \frac{k}{s(s+2)}$$

C. Seja o sistema descrito pela função de transferência em malha fechada a seguir. Esboçe em um gráfico a saída do sistema quando submetido a uma entrada $u(t) = 2$.

$$G_{MF}(s) = \frac{0.8}{s^2 + 0.56s + 1}$$

D. Um sistema monovariável foi alimentado com um degrau unitário na entrada, obtendo-se na saída o sinal descrito pelo gráfico abaixo. Determine a função de transferência em malha fechada do sistema.



E. Um sistema de controle de 2ª ordem em malha fechada deve ser projetado para ter um sobre-sinal entre 10 e 20% e um tempo de estabilização (a 2%) menor que 0.6s. Identifique graficamente a área possível no plano complexo para os pólos de malha fechada do sistema.

F. Um sistema de controle com realimentação negativa unitária é descrito pela função de transferência de malha aberta a seguir:

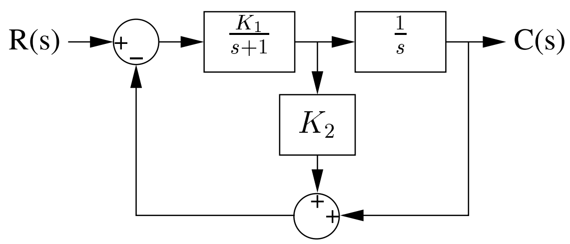
$$G(s) = \frac{a_2}{s(s+a_1)}$$

Determine valores para a_1 e a_2 de modo a satisfazer as seguintes especificações de desempenho para uma entrada degrau:

- sobressinal percentual $M_p \leq 5\%$; e
- tempo de estabilização a 2% $t_{SS} \leq 4$ segundos.

G. Um sistema de controle tem a estrutura mostrada na figura a seguir.

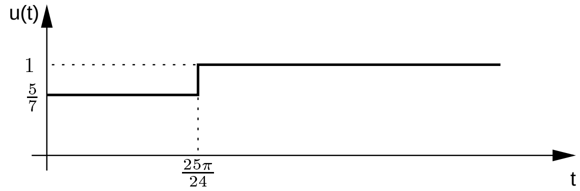
1. Determine a função de transferência em malha fechada.
2. Selecione K_1 e K_2 de modo que o sistema possua dois pólos em $s = -10$.
3. Calcule o tempo para que a resposta ao degrau atinja 90% do seu valor em regime.



H. Seja o sistema descrito pela função de transferência em malha fechada a seguir:

$$G_{MF}(s) = \frac{1}{s^2 + 0;56s + 1}$$

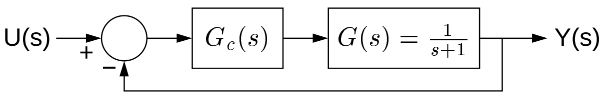
Calcule a saída do sistema quando submetido à entrada indicada no gráfico a seguir. Mostre que a partir de um determinado instante a saída se torna constante.



I. Um sistema tem a função de transferência em malha fechada a seguir. Assuma que os pólos complexos são dominantes e calcule de forma aproximada o tempo de estabilização (a 2%) da saída do sistema. Esta aproximação é valida? Comprove sua resposta por simulação da resposta ao degrau.

$$G_{MF}(s) = \frac{96(s+3)}{(s+8)(s^2+8s+36)}$$

J. Uma planta é modelada por uma função de transferência $G(s) = 1/(s+1)$. Deseja-se integrar a planta em um sistema de controle com realimentação negativa unitária e com um controlador de função de transferência $G_c(s)$, conforme o diagrama a seguir.



Deseja-se que, para uma entrada degrau unitário (ou seja, $U(s) = 1/s$), a saída $y(t)$ do sistema exiba o seguinte comportamento:

- erro estacionário nulo;
- sobressinal nulo ou inferior a 10%; e
- tempo de estabilização a 2% inferior a 4s.

As possíveis opções para a função de transferência $G_c(s)$ do controlador são:

• k	• $k(s+z)$	• $\frac{k}{s+p}$	• $\frac{k(s+z)}{s+p}$
• $\frac{k}{s}$	• $\frac{k(s+z)}{s}$	• $\frac{k}{s(s+p)}$	• $\frac{k(s+z)}{s(s+p)}$

onde os parâmetros k, z e p são livremente ajustáveis. Escolha uma destas opções, justificando as razões, e determine valores para os parâmetros livres de maneira a satisfazer as especificações de desempenho. Concluído o projeto, simule o comportamento do sistema para comprovar que as especificações foram atendidas ou explique porquê a análise teórica permite dispensar a simulação. Caso a simulação dê resultados não satisfatórios, refaça o problema com novas opções de projeto.

Apêndice A

Transformada de Laplace

A.1 Propriedades

A tabela A.1 a seguir apresenta a definição e algumas das propriedades mais úteis da transformação de Laplace.

Propriedade	**Descrição matemática**
Definição	$F(s) = \pounds\left[f(t)\right] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$
Homogeneidade	$\pounds\left[af(t)\right] = aF(s)$
Aditividade	$\pounds\left[f(t) + g(t)\right] = F(s) + G(s)$
Diferenciação	$\pounds\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = sF(s) - f(0)$
	$\pounds\left[\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right] = s^2F(s) - sf(0) - \dot{f}(0)$
	$\pounds\left[\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right] = s^nF(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} \overset{(k-1)}{f}(0)$
Integração	$\pounds\left[\int f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{1}{s}\left[\int f(t)dt\right]_{t=0}$
	$\pounds\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s}$
Valor inicial	$\lim\limits_{t\to 0} f(t) = \lim\limits_{s\to\infty} sF(s)$ se limites existem

Tabela A.1: Continua na próxima página

Propriedade	**Descrição matemática**
Valor final	$\int_0^\infty f(t)dt = \lim\limits_{s\to 0} F(s)$ se limites existem
	$\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = \lim\limits_{s\to 0} sF(s)$ se limites existem
Translação em s	$\pounds\left[e^{-at}f(t)\right] = F(s+a)$
Translação em t	$\pounds\left[f(t-a)1(t-a)\right] = e^{-as}F(s) \quad a \geq 0$
Multiplicação por t	$\pounds\left[tf(t)\right] = -\dfrac{dF(s)}{ds}$
	$\pounds\left[t^2 f(t)\right] = \dfrac{d^2}{ds^2}F(s)$
	$\pounds\left[t^n f(t)\right] = (-1)^n \dfrac{d^n}{ds^n}F(s) \quad n = 1, 2, 3, \cdots$
Mudança de escala em t	$\pounds\left[f\left(\dfrac{t}{a}\right)\right] = aF(as)$
Convolução	$\pounds\left[\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau\right] = F_1(s)F_2(s)$

Tabela A.1: Propriedades da transformada de Laplace

A.2 Transformadas de funções notáveis

A tabela A.2 a seguire apresenta as tranformadas inversas de Laplace das funções mais freqüentes em sistemas de controle.

$F(s)$	$f(t)$
1	$\delta(t)$ (impulso unitário)
$\dfrac{1}{s}$	$1(t)$ (degrau unitário)
$\dfrac{1}{s^2}$	t

Tabela A.2: Continua na próxima página

$F(s)$	$f(t)$
$\frac{1}{s^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}
$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}
$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-at} \quad n = 1, 2, 3, \cdots$
$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin \omega t$
$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos \omega t$
$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at} \sin \omega t$
$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at} \cos \omega t$
$\frac{\omega^2}{s^2+2\xi\omega s+\omega^2}$	$\frac{\omega}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega t} \sin(\omega\sqrt{1-\xi^2}t)$
$\frac{s}{s^2+2\xi\omega s+\omega^2}$	$-\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega t} \sin(\omega\sqrt{1-\xi^2}t - \phi) \quad \phi = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$
	$e^{-\xi\omega t}\left[\cos(\omega\sqrt{1-\xi^2}t) - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega\sqrt{1-\xi^2}t)\right]$
$\frac{\omega^2}{s(s^2+2\xi\omega s+\omega^2)}$	$1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega t} \sin(\omega\sqrt{1-\xi^2}t + \phi) \quad \phi = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$

Tabela A.2: Transformada inversa de Laplace de algumas funções

Apêndice B

Variáveis de estado

B.1 Propriedades da exponencial matricial

A tabela B.1 a seguir apresenta a definição e algumas das propriedades mais úteis da função exponencial matricial.

Propriedade	**Descrição matemática**
Definição	$e^{\mathsf{A}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathsf{A}^k t^k}{k!}$
Identidade	$e^{0} = \mathsf{I}$
Diferenciação	$\frac{d}{dt} e^{\mathsf{A}t} = e^{\mathsf{A}t} \cdot \mathsf{A} = \mathsf{A} \cdot e^{\mathsf{A}t}$
Transformada de Laplace	$\pounds \left(e^{\mathsf{A}t} \right) = s\mathsf{I} - \mathsf{A}$
Inversa	$\left(e^{\mathsf{A}t} \right)^{-1} = e^{-\mathsf{A}t}$
Distributividade escalar	$e^{\mathsf{A}(t+p)} = e^{\mathsf{A}t} \cdot e^{\mathsf{A}p}$
Não-distributividade matricial	$e^{(\mathsf{A}+\mathsf{B})t} = e^{\mathsf{A}t} \cdot e^{\mathsf{B}t} \quad \text{se} \quad \mathsf{AB} = \mathsf{BA}$ $e^{(\mathsf{A}+\mathsf{B})t} \neq e^{\mathsf{A}t} \cdot e^{\mathsf{B}t} \quad \text{se} \quad \mathsf{AB} \neq \mathsf{BA}$
Autovalores	$\text{autovalor} \left(e^{\mathsf{A}t} \right) = e^{\text{autovalor}(\mathsf{A}) \cdot t}$

Tabela B.1: Propriedades da função exponencial matricial

B.2 Dedução das formas canônicas

Seja um sistema com número de zeros estritamente inferior ao número de pólos, descrito pela equação diferencial:

$$\overset{(n)}{y} + a_1 \overset{(n-1)}{y} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = b_1 \overset{(n-1)}{u} + \cdots + b_{n-1}\dot{u} + b_n u$$

Introduzindo-se o operador de diferenciação D e a grandeza auxiliar v:

$$\frac{y}{u} = \frac{D^{n-1}b_1 + \cdots + Db_{n-1} + b_n}{D^n + D^{n-1}a_1 + \cdots + Da_{n-1} + a_n} \cdot \frac{v}{v} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y = b_1 \overset{(n-1)}{v} + \cdots + b_{n-1}\dot{b} + b_n v \\ u = \overset{(n)}{v} + a_1 \overset{(n-1)}{v} + \cdots + a_{n-1}\dot{v} + a_n v \end{cases}$$

Pode-se então definir as variáveis de estado $x_1, x_2, \cdots, x_n$ correspondentes respectivamente a $v, \dot{v}, \cdots, \overset{(n-1)}{v}$:

$$\begin{aligned} x_1 &= v & \Rightarrow \quad & \dot{x}_1 = v = x_2 \\ x_2 &= \dot{v} & \Rightarrow \quad & \dot{x}_2 = \ddot{v} = x_3 \\ & & \vdots \quad & \\ x_{n-1} &= \overset{(n-2)}{v} & \Rightarrow \quad & \dot{x}_{n-1} = \overset{(n-1)}{v} = x_n \\ x_n &= \overset{(n-1)}{v} & \Rightarrow \quad & \dot{x}_n = \overset{(n)}{v} = -a_1 x_n - \cdots - a_{n-1}x_2 - a_n x_1 + u \end{aligned}$$

O sinal de saída pode ser expresso como sendo:

$$y = b_1 x_n + \cdots + b_{n-1}x_2 + b_n x_1$$

Estas equações podem ser expressas sob a forma matricial, dando origem à *forma canônica controlável* de obtenção de um modelo no espaço de estados, onde:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathsf{A}\mathbf{x} + \mathsf{B}u \\ y = \mathsf{C}\mathbf{x} + \mathsf{D}u \end{cases}$$

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \qquad \mathsf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathsf{C} = \begin{bmatrix} b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_2 & b_1 \end{bmatrix} \qquad \mathsf{D} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Outra forma de conversão do modelo em equação diferencial para um modelo no espaço de estados é baseada na seguinte idéia:

$$\begin{aligned}
\overset{(n)}{y} + a_1 \overset{(n-1)}{y} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = b_1 \overset{(n-1)}{u} + \cdots + b_{n-1}\dot{u} + b_n u \quad &\Rightarrow \\
D^n y + D^{n-1} a_1 y + \cdots + D a_{n-1} y + a_n y = D^{n-1} b_1 u + \cdots + D b_{n-1} u + b_n u \quad &\Rightarrow \\
D^n y + D^{n-1} a_1 y - D^{n-1} b_1 u + \cdots + D a_{n-1} y - D b_{n-1} u = -a_n y + b_n u \quad &\Rightarrow \\
D[D[\cdots[D[y] + a_1 y - b_1 u] + \cdots + a_{n-1} y - b_{n-1} u] = -a_n y + b_n u &
\end{aligned}$$

Pode-se então definir as variáveis de estado $x_n, x_{n-1}, \cdots, x_1$ correspondentes às quantidades indicadas entre colchetes, de dentro para fora:

$$\begin{aligned}
x_n &= y \\
x_{n-1} &= \dot{x}_n + a_1 x_n - b_1 u & \Rightarrow \quad \dot{x}_n &= -a_1 x_n + x_{n-1} + b_1 u \\
& & \vdots & \\
x_1 &= \dot{x}_2 + a_{n-1} x_n - b_{n-1} u & \Rightarrow \quad \dot{x}_2 &= -a_{n-1} x_n + x_1 + b_{n-1} u \\
&\text{Da equação externa} & \Rightarrow \quad \dot{x}_1 &= -a_n x_1 + b_n u
\end{aligned}$$

Estas equações podem ser expressas sob a forma matricial, dando origem à *forma canônica observável* de obtenção de um modelo no espaço de estados, onde:

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \qquad \mathsf{B} = \begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ \vdots \\ b_2 \\ b_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathsf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathsf{D} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

B.3 Algoritmo de Leverrier

O algoritmo de Leverrier permite calcular a transformada de Laplace da matriz de transição de estados, ou seja, permite calcular $\Phi(s) = (s\mathsf{I} - \mathsf{A})^{-1}$ sem a necessidade de realizar uma inversão de matriz simbólica.

Seja $\Delta(s)$ o determinante de $\Phi(s)$, que vamos supor inicialmente conhecido, e α_i os coeficientes deste polinômio:

$$\Delta(s) = \det(s\mathsf{I} - \mathsf{A}) \qquad = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n$$

Mostra-se que:

$$\Phi(s) = \frac{1}{\Delta(s)}(\mathsf{R}_0 s^{n-1} + \mathsf{R}_1 s^{n-2} + \cdots + \mathsf{R}_{n-2} s + \mathsf{R}_{n-1})$$

onde:

$$\begin{aligned} \mathsf{R}_0 &= \mathsf{I} \\ \mathsf{R}_1 &= \mathsf{A}\mathsf{R}_0 + \alpha_1 \mathsf{I} \\ &\vdots \\ \mathsf{R}_{n-1} &= \mathsf{A}\mathsf{R}_{n-2} + \alpha_{n-1} \mathsf{I} \\ \mathsf{R}_n &= \mathsf{A}\mathsf{R}_{n-1} + \alpha_n \mathsf{I} = 0 \end{aligned} \tag{B.1}$$

Os coeficientes α_i do determinante $\Delta(s)$ podem ser calculados utilizando-se o traço[1] do produto das matrizes AR_i:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\operatorname{trace}(\mathsf{AR}_0) \\ \alpha_2 &= -\operatorname{trace}(\mathsf{AR}_1)/2 \\ &\vdots \\ \alpha_n &= -\operatorname{trace}(\mathsf{AR}_{n-1})/n \end{aligned} \tag{B.2}$$

B.4 Funções de matrizes

Ao se trabalhar com modelos no espaço de estados, aparecem algumas funções matriciais, como $\exp(\mathsf{A})$ e $\ln(\mathsf{A})$, onde A é uma matriz quadrada. Esta seção dá algumas propriedades das funções matriciais e maneiras de calculá-las.

Uma propriedade muito útil de uma matriz quadrada de ordem n é o chamado *Teorema de Cayley-Hamilton*. Este teorema diz que, se:

$$c(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}\lambda + \alpha_n = 0$$

é a equação característica[2] da matriz A, então a equação característica é satisfeita pela própria matriz A:

$$c(\mathsf{A}) = \mathsf{A}^n + \alpha_1\mathsf{A}^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}\mathsf{A} + \alpha_n\mathsf{I} = 0$$

Usando-se o teorema de Cayley-Hamilton, pode-se mostrar que, para cada função matricial f, há um polinômio p de grau menor que n tal que:

$$f(\mathsf{A}) = p(\mathsf{A}) = a_1\mathsf{A}^{n-1} + a_2\mathsf{A}^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\mathsf{A} + a_n\mathsf{I}$$

A determinação dos coeficientes a_i pode ser feita sabendo-se que:

$$f(\lambda_i) = p(\lambda_i), \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

onde λ_i são os autovalores[3] de A. Se os autovalores são distintos, então estas condições são suficientes para se determinar todos os coeficientes a_i. Se há um autovalor λ_j de

[1] O *traço* de uma matriz quadrada é a soma dos elementos da sua diagonal principal: $\operatorname{trace}(\mathsf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

[2] A equação característica da matriz A é obtida fazendo-se $\det(\lambda\mathsf{I} - \mathsf{A}) = 0$.

[3] Os autovalores de uma matriz são as raízes de sua equação característica.

multiplicidade m, então deverão ser adicionadas as seguintes condições:

$$\begin{aligned}
\dot{f}(\lambda_j) &= \dot{p}(\lambda_j) \\
\ddot{f}(\lambda_j) &= \ddot{p}(\lambda_j) \\
&\vdots \\
\overset{(m-1)}{f}(\lambda_j) &= \overset{(m-1)}{p}(\lambda_j)
\end{aligned}$$

Apêndice C

Transformada $\mathcal{Z}$

C.1 Propriedades

A tabela C.1 apresenta a definição e algumas das propriedades mais úteis da transformada $\mathcal{Z}$. Assume-se que $f_k = 0$ para $k < 0$.

Propriedade	**Descrição matemática**
Definição	$F(z) = \mathcal{Z}\left[f_k\right] = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k}$
Homogeneidade	$\mathcal{Z}\left[a f_k\right] = aF(z)$
Aditividade	$\mathcal{Z}\left[f_k + g_k\right] = F(z) + G(z)$
Avanço no tempo	$\mathcal{Z}\left[f_{k+n}\right] = z^n \left[F(z) - F_1(z)\right], \quad F_1(z) = \sum_{j=0}^{n-1} f_j z^{-j}$
Atraso no tempo	$\mathcal{Z}\left[f_{k-n}\right] = z^{-n} F(z)$
Valor inicial	$f_0 = \lim_{z\to\infty} F(z)$ se o limite existe
Valor final	$\lim_{k\to\infty} f_k = \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})F(z)$ se o limite existe e se todos os pólos de $(1 - z^{-1})F(z)$ estão dentro do círculo de raio unitário
Convolução	$\mathcal{Z}\left[h_k = \sum_{i=0}^{k} f_i g_{k-i}\right] = F(z)G(z)$

Tabela C.1: Propriedades da transformada $\mathcal{Z}$

C.2 Transformadas de seqüências

A tabela C.2 apresenta a tranformada $\mathcal{Z}$ de algumas seqüências f_k usuais em sistemas de controle. Assume-se que $f_k = 0$ para $k < 0$.

f_k	$F(z)$
$\delta_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$	1
1 (degrau unitário)	$\dfrac{z}{z-1}$
k	$\dfrac{z}{(z-1)^2}$
k^2	$\dfrac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
$e^{-\alpha k}$	$\dfrac{z}{z-e^{-\alpha}}$
α^k	$\dfrac{z}{z-\alpha}$
$\sin \alpha k$	$\dfrac{\sin\alpha \cdot z}{z^2 - 2\cos\alpha \cdot z + 1}$
$\cos \alpha k$	$\dfrac{z(z-\cos\alpha)}{z^2 - 2\cos\alpha \cdot z + 1}$

Tabela C.2: Transformada $\mathcal{Z}$ de algumas seqüências

C.3 Correspondência com transformadas de Laplace

A tabela C.3 apresenta as tranformadas $\mathcal{Z}$ correspondentes às transformadas de Laplace mais freqüentes em sistemas de controle. Os valores das seqüências f_k correspondentes são obtidos a partir das funções contínuas $f(t)$ amostradas nos instantes de tempo $t = kT$:

$$f_k = \begin{cases} f(kT), & k = 0, 1, 2, \cdots \\ 0, & k < 0 \end{cases} \qquad \text{onde} \qquad f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$$

É importante que se note que $F(z)$ na tabela C.3 **não** dá a função de transferência discreta correspondente à amostragem com um segurador de ordem zero de um sistema com função de transferência contínua $F(s)$. É um erro bastante comum se fazer esta suposição. A função de transferência discreta de um sistema amostrado deve ser obtida através do procedimento descrito na seção 3.6 ou por consulta direta à tabela C.4.

$F(s)$	$f(t)$	$F(z)$
$\frac{1}{s}$	1 (degrau unitário)	$\frac{z}{z-1}$
$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$\frac{1}{s^3}$	$\frac{t^2}{2}$	$\frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$
$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin(\omega t)$	$\frac{\sin(\omega T)z}{z^2-2\cos(\omega T)z+1}$
$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos(\omega t)$	$\frac{z[z-\cos(\omega T)]}{z^2-2\cos(\omega T)z+1}$
$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin(\omega t)$	$\frac{e^{-aT}\sin(\omega T)z}{z^2-2e^{-aT}\cos(\omega T)z+e^{-2aT}}$
$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos(\omega t)$	$\frac{z[z-e^{-aT}\cos(\omega T)]}{z^2-2e^{-aT}\cos(\omega T)z+e^{-2aT}}$
$\frac{s}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}[\cos(\omega t)-\left(\frac{a}{\omega}\right)\sin(\omega t)]$	$\frac{z\{z-e^{-aT}[\cos(\omega T)+\left(\frac{a}{\omega}\right)\sin(\omega T)]\}}{z^2-2e^{-aT}\cos(\omega T)z+e^{-2aT}}$

Tabela C.3: Transformadas $\mathcal{Z}$ correspondentes a transformadas de Laplace notáveis

C.4 Amostragem de funções de transferência contínuas

A tabela C.4 apresenta a correspondência entre as funções de transferência discreta $G(z)$ e contínua $G(s)$ para um sistema precedido por um segurador de ordem zero. A função $G(z)$ é indicada explicitamente ou através dos coeficientes dos polinômios da seguinte expressão:

$$G(z) = \frac{b_1 z^{n-1} + \cdots + b_{n-1}z + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n}$$

$G(s)$	$G(z)$ ou coeficientes de $G(z)$
$\frac{1}{s}$	$\frac{T}{z-1}$
$\frac{1}{s^2}$	$\frac{T^2(z+1)}{2(z-1)^2}$

Tabela C.4: continua na próxima página

$G(s)$	$G(z)$ ou coeficientes de $G(z)$
$\dfrac{1}{s^m}$	$\dfrac{z-1}{z}\lim_{a\to 0}\dfrac{(-1)^m}{m!}\dfrac{\partial^m}{\partial a^m}\left(\dfrac{z}{z-e^{-aT}}\right)$
e^{-sT}	z^{-1}
$\dfrac{a}{s+a}$	$\dfrac{1-e^{-aT}}{z-e^{-aT}}$
$\dfrac{a}{s(s+a)}$	$b_1=\dfrac{1}{a}(aT-1+e^{-aT})$ $b_2=\dfrac{1}{a}(1-e^{-aT}-aTe^{-aT})$ $a_1=-(1+e^{-aT})$ $a_2=e^{-aT}$
$\dfrac{a^2}{(s+a)^2}$	$b_1=1-e^{-aT}(1+aT)$ $b_2=e^{-aT}(e^{-aT}+aT-1)$ $a_1=-2e^{-aT}$ $a_2=e^{-2aT}$
$\dfrac{s}{(s+a)^2}$	$\dfrac{(z-1)Te^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
$\dfrac{ab}{(s+a)(s+b)}$ $a\neq b$	$b_1=\dfrac{b(1-e^{-aT})-a(1-e^{-bT})}{b-a}$ $b_2=\dfrac{a(1-e^{-bT})e^{-aT}-b(1-e^{-aT})e^{-bT}}{b-a}$ $a_1=-(e^{-aT}+e^{-bT})$ $a_2=e^{-(a+b)T}$
$\dfrac{s+c}{(s+a)(s+b)}$ $a\neq b$	$b_1=\dfrac{e^{-bT}-e^{-aT}+(c/b)(1-e^{-bT})-(c/a)(1-e^{-aT})}{a-b}$ $b_2=\dfrac{c}{ab}e^{-(a+b)T}+\dfrac{b-c}{b(a-b)}e^{-aT}+\dfrac{c-a}{a(a-b)}e^{-bT}$ $a_1=-e^{-aT}-e^{-bT}$ $a_2=e^{-(a+b)T}$
$\dfrac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$ $\xi<1$	$b_1=1-\alpha\left(\beta+\dfrac{\xi\omega_n}{\omega_d}\gamma\right)$ $\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ $b_2=\alpha^2+\alpha\left(\dfrac{\xi\omega_n}{\omega_d}\gamma-\beta\right)$ $\alpha=e^{-\xi\omega_n T}$ $a_1=-2\alpha\beta$ $\beta=\cos(\omega_d T)$ $a_2=\alpha^2$ $\gamma=\sin(\omega_d T)$
$\dfrac{s}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$ $\xi<1$	$b_1=\dfrac{1}{\omega_d}e^{-\xi\omega_n T}\sin(\omega_d T)$ $b_2=-b_1$ $\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ $a_1=-2e^{-\xi\omega_n T}\cos(\omega_d T)$ $a_2=e^{-2\xi\omega_n T}$
$\dfrac{a^2}{s^2+a^2}$	$b_1=1-\cos aT$ $b_2=1-\cos aT$ $a_1=-2\cos aT$ $a_2=1$
$\dfrac{s}{s^2+a^2}$	$b_1=\dfrac{1}{a}\sin aT$ $b_2=-\dfrac{1}{a}\sin aT$ $a_1=-2\cos aT$ $a_2=1$

Tabela C.4: continua na próxima página

$G(s)$	$G(z)$ ou coeficientes de $G(z)$		
$\dfrac{a}{s^2(s+a)}$	$b_3 = -\left[\dfrac{1}{a^2}(\alpha - 1) + \alpha T\left(\dfrac{T}{2} + \dfrac{1}{a}\right)\right]$	$a_3 = -\alpha$	$\alpha = e^{-aT}$
	$b_2 = (1 - \alpha)\left(\dfrac{h^2}{2} - \dfrac{2}{a^2}\right) + \dfrac{h}{a}(1 + \alpha)$	$a_2 = 2\alpha + 1$	
	$b_1 = \dfrac{1 - \alpha}{a^2} + T\left(\dfrac{T}{2} - \dfrac{1}{a}\right)$	$a_1 = -(\alpha + 2)$	

Tabela C.4: Função de transferência discreta de sistemas amostrados

Referências Bibliográficas

[AW97] Karl J. Aström and Björn Wittenmark. *Computer Controled Systems.* Information and System Sciences. Prentice-Hall, EUA, 3 edition, 1997. ISBN 0-13-314899-8.

[Bol95] W. Bolton. *Engenharia de Controle.* Makron, Brasil, 1995. ISBN 85-346-0343-X.

[DB95] Richard C. Dorf and Robert H. Bishop. *Modern Control Systems.* Electrical and Computer Engineering: Control Engineering. Addison-Wesley, EUA, 7 edition, March 1995. ISBN 0-201-50174-0.

[Gar97] Cláudio Garcia. *Modelagem e Simulação.* Editora da Universidade de São Paulo, Av. Prof. Luciano Gualberto, Travessa J, 374, 05508, São Paulo, SP, Brasil, 1997. ISBN 85-314-0402-9.

[MP01] Paulo Sérgio da Motta Pires. *Introdução ao Scilab - Versão 1.0.* `http://www.dca.ufrn.br/~pmotta/`, UFRN, Brasil, November 2001.

[Oga97] Katsuhiko Ogata. *Modern Control Engineering.* Prentice Hall, EUA, 3 edition, 1997. ISBN 0-13-227307-1.

[PH96] Charles L. Phillips and Royce D. Harbor. *Sistemas de Controle e Realimentação.* Makron, Brasil, 1996. ISBN 85-346-0596-3.